MANUALI HOEPLI

GEOMETRIA ANALITICA
DELLO SPAZIO

PER

F. ASCHIERI

Professore nella R. Università di Pavia.

CON 11 INCISIONI

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA
MILANO

1888.

Milano, Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

INDICE

PREFAZIONE

In questi elementi di Geometria analitica dello Spazio sono esposti i principii dell'Omografia e della Reciprocità dello Spazio, non che i Teoremi principali sulle superficie di 2° ordine ed alcune generalità sulle curve e le superficie algebriche in particolare.

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

INTRODUZIONE

§ 1. Spazii lineari ad una e due dimensioni.

1. In ciò che precede abbiamo dato i principii di *Geometria analitica del piano* come viene ordinariamente concepito e posto per la più semplice fra le *Superficie* dello *Spazio ordinario*; al concetto del quale si suole pervenire, per via di astrazione, dallo *Spazio* in natura occupato da un corpo, cioè dal *Volume* di un corpo, la cui massa vada aumentando in tutti i sensi indefinitamente.

Più generalmente si può fare la Geometria analitica degli Spazii definendoli colla determinazione parametrica degli elementi che li compongono; elementi che chiameremo sempre *punti*; e diremo che: *uno spazio S_n è lineare e di specie n* o *di n dimensioni, se ad ogni elemento assegnabile di quello spazio corrispondendo un sistema di valori attribuiti ad n variabili indipendenti p_1, p_2,... p_n; od anche un sistema di* *valori di* $n+1$ *variabili indipendenti omogenee:* x_1, x,... x_{n+1} (*vale a dire variabili, che vanno considerate soltanto nei rapporti di* n *di esse alla rimanente, cosicchè siano sistemi equivalenti di valori, cioè determinano lo stesso elemento, tutti i numeri*

$$x'_r \ (r = 1,\ 2 \dots n+1)$$

per cui sia

$$x'_r = \rho\, x_r$$

essendo ρ *un numero arbitrario*); *viceversa poi, ad un sistema di valori attribuiti alle variabili* p_1, p_2,... p_n *indipendenti e non omogenee,* oppure *ad un sistema di valori attribuiti alle* $n+1$ *variabili omogenee* x_1, x_2,... x_{n+1} *vi corrisponde uno ed uno solo elemento; determinato così in modo unico da quel sistema di numeri.*

Il sistema di numeri non omogeneo e quello dei numeri omogenei che determinano un elemento di S_n si dicono rispettivamente il sistema dei *parametri* e delle *coordinate omogenee* dell'elemento individuato.

2. Ciò posto; noi chiameremo *retta* ogni spazio S_1 lineare di 1ª specie; e *piano* S_2 ogni spazio lineare di 2ª specie. Se quindi siano x_1, x_2, x_3 le coordinate omogenee di un punto del piano S_2 tutti i punti le cui coordinate soddisfano all'equazione:

$$\xi_x = \xi_1\, x_1 + \xi_2\, x_2 + \xi_3\, x_3 = o$$

lineare omogenea, formeranno uno spazio $S_{1,\xi}$ *lineare di 1 specie*; e si ammetterà la *continuità* *degli elementi* nei varii spazii $S_{1,\xi}$ del piano; il che conduce ad ammettere la *continuità* degli elementi del piano stesso.

Gli spazii lineari di S_2, ossia adunque le *rette* di S_2, formano esse stesse uno spazio di 2ª specie lineare: formano in altri termini lo spazio stesso S_2 determinandone ciascun *punto* come *centro* di un fascio di raggi o di rette. Così se nell'equazione scritta le x_1, x_2, x_3 sono le coordinate di un punto fisso del piano S_2, essa al variare delle ξ_r, *rappresenterà adunque* il punto $x_1 x_2 x_3$ come *centro* di un fascio di raggi; ossia come *inviluppo*.

Una retta $S_{1,\xi}$ del piano è determinata da due dei *suoi punti*; e se y_r, z_r sono le coordinate di due punti Y, Z della retta $S_{1,\xi}$ le formole

$$\rho x_r = y_r + \lambda z_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

serviranno a dare per ogni valore di λ un punto della retta stessa.

Correlativamente due rette

$$\eta_x = o \qquad \xi_x = o$$

determinano in generale come loro intersezione un punto del piano, e le formole:

$$\rho \xi_r = \eta_r + \lambda \xi_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

servono a dare, per ogni valore di λ, le coordinate di una retta passante per quel punto.

Nel piano S_2 avrà luogo il *principio di Dualità*, e riterremo anche tutte le definizioni già date relative alle Operazioni della Geometria del piano: PROJEZIONE *da un centro*; e SEZIONE *con* *un asse* (retta); non che tutte quelle relative alle *forme fondamentali* del piano e alle figure elementari di esso, cioè *ai poligoni e ai moltilateri completi* o *semplici.*

3. Ciò posto, cominciamo ad osservare che se:

$$\xi_x = 0 \qquad \eta_x = 0 \qquad \zeta_x = 0$$

sono l'equazioni di tre rette x, y, z non concorrenti in uno stesso punto, cioè tali che il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

delle loro coordinate non sia nullo, allora una retta qualunque del piano sarà rappresentata da un'equazione della forma:

$$\lambda_x = \lambda_1 \xi_x + \lambda_2 \eta_x + \lambda_3 \zeta_x = 0.$$

Correlativamente se

$$x_\xi = 0 \qquad y_\xi = 0 \qquad z_\xi = 0$$

sono l'*equazioni tangenziali* di tre punti X, Y, Z del piano non posti sulla stessa retta, cioè il determinante:

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

delle loro coordinate non sia nullo, allora l'equazione tangenziale di un altro punto qualunque del piano si potrà porre sotto la forma:

$$l_x = l_1 x_\xi + l_2 y_\xi + l_3 z_\xi = o.$$

4. Siano ora:

$$x_\xi = o \qquad y_\xi = o \qquad z_\xi = o$$

l'equazioni dei vertici X, Y, Z di un triangolo e sia quindi:

$$o_1 x_\xi + o_2 y_\xi + o_3 z_\xi = o$$

l'equazione di un punto qualunque O del piano. L'equazioni dei vertici X', Y', Z' di un altro triangolo che siano in linea retta con O e rispettivamente con X, Y, Z saranno necessariamente della forma:

$$o'_1 x_\xi + o_2 \; y_\xi + o_3 \; z_\xi = o$$
$$o_1 \; x_\xi + o'_2 y_\xi + o_3 \; z_\xi = o$$
$$o_1 \; x_\xi + o_2 \; y_\xi + o'_3 z_\xi = o,$$

da cui si ricava:

$$(o_1 - o'_1) x_\xi = (o_2 - o'_2) y_\xi$$
$$(o_2 - o'_2) y_\xi = (o_3 - o'_3) z_\xi$$
$$(o_3 - o'_3) z_\xi = (o_1 - o'_1) x_\xi.$$

Ora queste sono evidentemente l'equazioni dei tre punti in cui si tagliano le coppie:

$$X Y,\ X' Y';\quad Y Z,\ Y' Z';\quad Z X,\ Z' X'$$

di lati dei due triangoli $X Y Z$, $X' Y' Z'$ epperò essendo la somma dei primi membri delle ultime equazioni identicamente uguale a quelle dei secondi membri ne segue, per un criterio già noto (v. § 8 *Geom. anal. del piano*), che i tre punti nominati sono in linea retta. Sostituendo alle coordinate di punti quelle di rette e viceversa, si ha il teorema *correlativo* e quindi possiamo dire:

Se nel piano S_2 siano dati due triangoli XYZ, $X'Y'Z'$ e le coppie:

$$X, X'; \quad Y, Y'; \quad Z, Z'$$

di vertici siano allineate con un punto fisso O, le coppie:

$$YZ, Y'Z'; \quad ZX, Z'X'; \quad XY, X'Y'$$

di lati si tagliano in punti di una retta fissa s; viceversa se dei due triangoli le coppie:

$$YZ, Y'Z'; \quad ZX, Z'X'; \quad XY, X'Y'$$

di lati si tagliano in punti di una retta fissa s, le coppie:

$$X, X'; \quad Y, Y'; \quad Z, Z'$$

di vertici sono allineati con un punto fisso O.

I due triangoli sono allora *omologici* essendo O il centro ed S l'*asse di omologia.*

Da questo teorema segue col puro ragionamento la *teoria delle forme armoniche definite geometricamente col quadrangolo e col quadrilatero completi, come si è dato in Geometria projettiva* (v. Manuale projettiva, p. 60 e seg.) e non crediamo qui dover ripetere tali ragionamenti, il nostro scopo essendo quello di far vedere la coincidenza della definizione geometrica di forma armonica con quella analitica che noi qui diamo.

5. A tale scopo siano λ, λ' due *parametri* reali legati da una *relazione bilineare* cioè della forma

$$A \lambda \lambda' + B \lambda + C \lambda' + D = o;$$

cioè *lineare* rispetto a ciascuno dei parametri stessi. La relazione scritta stabilisce una *corrispondenza univoca fra i valori dei parametri* λ, λ' *ed una corrispondenza tale che se siano*

$$\lambda_r \ (r = 1, 2, 3, 4)$$

quattro valori speciali di λ *e*

$$\lambda'_r \ (r = 1, 2, 3 \ 4)$$

i rispettivi corrispondenti di λ' *si ha:*

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} =$$

$$(\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \lambda'_4) = \frac{\lambda'_1 - \lambda'_3}{\lambda'_2 - \lambda'_3} : \frac{\lambda'_1 - \lambda'_4}{\lambda'_2 - \lambda'_4}.$$

La funzione $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ sarà detta *il rapporto anarmonico dei quattro parametri* λ_r *presi nell'ordine indicato nel simbolo*. Sui rapporti anarmonici di 4 parametri sono vere tutte le proprietà dei rapporti anarmonici segmentarii di 4 punti di una retta già definiti e studiati nella geometria ordinaria del piano. Quando sia:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = -1$$

il rapporto anarmonico dei 4 parametri si dirà *armonico* e valgono allora le proprietà studiate dei rapporti armonici di 4 punti di una retta ossia delle forme armoniche nell'ordinaria geometria già data del piano.

6. Nella geometria del piano che vogliamo porre, colla definizione parametrica data di esso, diremo: *rapporto anarmonico di quattro punti di una punteggiata il rapporto anarmonico dei loro parametri, quando i punti della retta siano determinati con un parametro* λ *mediante due punti fissi, che diremo punti fondamentali.*

In altri termini se Y, Z sono due punti di una retta YZ del piano di coordinate

$$y_r,\ z_r\ (r = 1, 2, 3),$$

essendo

$$\rho\, x_r = y_r + \lambda\, z_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

le coordinate di un altro punto qualunque della retta, il rapporto anarmonico dei quattro punti corrispondenti ai valori $\lambda_r\ (r = 1, 2, 3, 4)$ di λ sarà $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$, intendendo che gli elementi debbono essere considerati nell'ordine corrispondente a quello dei loro parametri.

Intanto il valore del rapporto anarmonico

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$$

è indipendente dai punti fondamentali. Ed invero se prendiamo per punti fondamentali quelli corrispondenti ai valori λ_0, λ'_0 di λ, allora le coordinate x_r di un altro punto della retta saranno:

$$\rho_r\, x_r = (y_r + \lambda_0\, z_r) + \mu\, (y_r + \lambda'_0\, z_r) \quad (r = 1, 2, 3);$$

quindi avremo i quattro punti di parametri primitivi λ_r, quando μ acquista i valori μ_r dati dalla relazione:

$$\lambda_r = \frac{\lambda_0 \mu_r + \lambda'_0}{1 + \mu_r} \; (r = 1, 2, 3, 4),$$

dunque si avrà:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4),$$

c. d. d.

Correlativamente s' intenda estesa la definizione di rapporto anarmonico al fascio di quattro raggi e il valore di esso risulterà indipendente dai due raggi fondamentali scelti.

Il valore del rapporto anarmonico così definito non cambia per le operazioni della geometria del piano.

Così se dal punto O di coordinate o_1, o_2, o_3 projettiamo i 4 punti M_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ della punteggiata YZ aventi i parametri:

$$\lambda_r \; (r = 1, 2, 3, 4)$$

otterremo i quattro raggi:

$$O M_1, \quad O M_2, \quad O M_3, \quad O M_4$$

il cui rapporto anarmonico vale $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$.

Infatti le coordinate ξ_r del raggio OM che projetta un punto qualunque corrente M della retta YZ' sono date dalle formole:

$$\rho \, \xi_r = \eta_r + \lambda \, \zeta_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

ove η_r, ζ_r sono le coordinate dei raggi OY, OZ: ed appunto rispetto a tali raggi fondamentali il rapporto anarmonico dei 4 raggi OM_r è $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$, c. d. d.

Egualmente si proverebbe che il rapporto anarmonico di 4 raggi di un fascio eguaglia quello di una sua sezione con una retta del piano.

7. Colla data definizione parametrica di rapporto anarmonico di 4 elementi di una forma fondamentale di 1ª specie del piano, noi diremo che una forma di 4 elementi presi in un certo ordine è *armonica* quando il loro *rapporto anarmonico* dei 4 elementi sia *armonico*; e quindi per le forme armoniche così definite parametricamente avranno luogo le stesse proprietà che per le forme armoniche definite geometricamente col quadrangolo o col quadrilatero.

Ora io dico che le due definizioni coincidono: cioè quando si abbia una forma armonica parametricamente definita, essa è forma armonica geometricamente; cioè, se si tratta ad es. di una punteggiata M_1, M_2, M_3, M_4 sulla retta YZ; e se sia:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = -1,$$

si potrà costruire uno, epperò infiniti quadrangoli di cui due lati opposti passano per M_1, due per M_2, un quinto per M_3 e il rimanente per M_4.

Infatti immaginiamo nel piano due rette x, y condotte ad arbitrio per M_1 le cui equazioni siano:

$$\xi_x = o \qquad \eta_x = o.$$

Per M_2 conduciamo pure una retta z ad arbitrio la cui equazione sia:

$$\zeta_x = o,$$

allora se indichiamo con A, B rispettivamente i punti $x\,z$, $y\,z$; e con C il punto ove $A\,M_3$ sega y; la retta (determinata) $C\,M_2$ segherà la retta x in un punto D. Avremo così determinato un quadrangolo $ABCD$; e basterà dimostrare quindi che il lato $B\,D$ opposto ad $A\,C$ concorre nel punto M_4 quando il *rapporto armonico* dei 4 punti M_1, M_2, M_3, M_4 sia armonico, ossia valga -1.

Per provare questo, osserviamo che la retta $C\,M_2$ ossia $CD = t$, avrà un'equazione della forma:

$$t_x = \lambda\,\xi_x + \mu\,\eta_x + \upsilon\,\zeta_x = o.$$

Le rette x, y, z, t costituiscono un quadrilatero completo di cui la retta data $YZ = M_1 M_2$ ne è una diagonale rappresentata dall'equazione:

$$\lambda\,\xi_x + \mu\,\eta_x = o\,;$$

e le altre due diagonali AC, BD saranno rispettivamente rappresentate dall'equazioni:

$$\lambda\,\xi_x + \upsilon\,\zeta_x = o$$

$$\mu\,\eta_x + \upsilon\,\zeta_x = o.$$

Quindi se indichiamo con O il punto ove si segano $A\,C$, $B\,D$ l'equazione:

$$(\lambda\,\xi_x + \upsilon\,\zeta_x) + \rho\,\{\mu\,\eta_x + \upsilon\,\zeta_x\} = o$$

rappresenta per ogni valore di ρ una retta del fascio O e le due equazioni corrispondenti ai valori $-\rho$ e $+1$ sono quelli delle rette $O\,M_1$, $O\,M_2$ onde indicando con M_4' il punto ove la diagonale $B\,D$ del quadrilatero $x\,y\,z\,t$ sega la diagonale $YZ = M_1 M_2$, avremo che il rapporto anarmonico dei quattro raggi OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 sarà armonico, essendo:

$$(-1 \quad 1 \quad 0 \quad \infty) = -1,$$

perchè -1, 1, 0, ∞ sono i parametri dei quattro raggi nominati rispetto ai raggi fondamentali OM_3, OM_4'.

D'altra parte se riferiamo i 4 raggi del fascio ai raggi fondamentali OY, OZ ed indichiamo con λ_4' il parametro del raggio OM_4' avremo che il rapporto anarmonico dei quattro raggi in discorso sarà:

$$(\lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 \, \lambda_4')$$

e dovrà essere armonico cioè si dovrà avere:

$$(\lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 \, \lambda_4') = -1.$$

Ora essendo appunto λ_4 il parametro di M_4 rispetto ai punti fondamentali YZ, sarà per ipotesi

$$(\lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 \, \lambda_4) = -1,$$

dunque $\lambda_4' = \lambda_4$ ed M_4' coincide con M_4, c. d. d.

8. Consideriamo al solito una punteggiata YZ; allora un punto qualunque X della retta ha per coordinate:

$$\rho \, x_r = y_r + \lambda \, z_r \; (r = 1, 2, 3)$$

e λ è il parametro del punto, e non è altro che il rapporto anarmonico dei 4 punti:

$$(Z \, Y \, E \, X),$$

perchè si ha

$$(Z\,Y\,E\,X) = (\infty\,0\,1\,\lambda) = \lambda;$$

essendo quindi E il punto di parametro $\lambda = 1$, che diremo *punto unità*. Ciò posto se fra i parametri λ, λ' di due elementi correnti della retta YZ poniamo un'equazione bilineare cioè della forma:

$$A\,\lambda\,\lambda' + B\,\lambda + C\,\lambda' + D = o\,,$$

perciò che abbiamo osservato, poniamo una corrispondenza tale fra gli elementi di YZ che il rapporto anarmonico di 4 elementi della punteggiata descritta dal punto M_λ di parametro λ, eguaglia quello dei punti corrispondenti nella punteggiata descritta dal punto corrente $M_{\lambda'}$ di parametro λ'.

Le due punteggiate si diranno riferite fra loro proiettivamente; e la corrispondenza così definita dalla equazione bilineare è una corrispondenza univoca determinata da tre coppie di elementi corrispondenti; e che non può ammettere più di due elementi *uniti* senza che ogni elemento sia *unito*; cioè abbia per corrispondente sè stesso.

Se quindi siano ζ', η', E' i parametri di tre elementi Z', Y', E' presi sulla retta YZ; possiamo allora stabilire una corrispondenza projettiva tale che alle posizioni Z', Y', E' di M'_λ corrispondono le posizioni Z, Y, E di M_λ: quindi indicando con λ' il parametro della posizione X' di M'_λ corrispondente alla X di M_λ si avrà che il rapporto anarmonico $(Z'\,Y'\,E'\,X)$ avrà il valore λ'; cioè la relazione di projettività che determina la voluta corrispondenza projettiva serve anche alla trasformazione dei parametri; ossia dei punti fondamentali, giacchè λ' non è *altro che il parametro del punto X rispetto agli elementi fondamentali* Z' Y' E'.

9. Tutti gli elementi di una punteggiata si possono quindi determinare coi valori dei rapporti anarmonici che gli elementi stessi determinano così tre elementi fissi (fondamentali), del resto quali si vogliano presi sulla retta. Ma sia geometricamente che analiticamente si può dimostrare che con forme armoniche a partire da tre elementi fissi si possono ottenere tutti gli elementi di una forma fondamentale di 1ª specie; proprietà che stabilisce il teorema di Standt che: *due forme sono projettive se ad una forma armonica dell' una ne corrisponde una dell' altra.*

In altri termini la proprietà contenuta nel teorema di Standt è condizione non solo necessaria, ma sufficiente per la projettività delle forme come l'abbiamo definita parametricamente o colle operazioni della Geometria projettiva del piano.

Per dimostrare il teorema nominato si può procedere in questo modo:

Indichiamo in generale con A_k l'elemento di parametro K numero reale positivo o negativo rispetto ai tre elementi fondamentali A_∞, A_0, A_1 di parametri appunto ∞, o, 1 rispettivamente.

Basterà dimostrare che con forme armoniche, in numero finito od illimitato, si può determinare esattamente o accostarsi indefinitamente all'elemento A_k della forma, essendo K il rapporto anarmonico dei 4 elementi $A_\infty A_0 A_1 A_k$, che indicheremo con $(A_\infty A_0 A_1 A_k)$, secondo che K è un numero *razionale* oppure *irrazionale*.

Per vedere questo io dico che avendosi:

$$\left.\begin{array}{l} -1 = (A_\infty A_1 A_0 A_2) = \\ \quad (A_\infty A_2 A_1 A_3) = \\ \quad (A_\infty A_3 A_2 A_4) = - \\ \quad (A_\infty A_r A_{r-1} A_{r+1}) \\ \text{e} \\ -1 = (A_\infty A_0 A_1 A_{-1}) = \\ \quad (A_\infty A_{-1} A_0 A_{-2}) = \\ \quad (A_\infty A_{-2} A_{-1} A_{-3}) = - \\ \quad (A_\infty A_{-k} A_{-(k-1)} A_{-(k+1)}) \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

sarà appunto in generale:

$$\left.\begin{array}{l} (A_\infty A_0 A_1 A_{r+1}) = r + 1 \\ \text{ed} \\ (A_\infty A_0 A_1 A_{-(k+1)}) = -(k+1) \end{array}\right\} \quad \text{(I)}'$$

r, $-k$ numeri interi.

Infatti per essere:

$$(A_\infty A_1 A_0 A_2) = -1$$

risulta subito:

$$(A_\infty A_0 A_1 A_2) = 2$$

e quindi

$$(A_\infty A_2 A_1 A_3) = \frac{2 - \mu}{1} = -1$$

onde pel parametro μ di A_3 si ha appunto:

$$\mu = 3$$

e così via; ed allo stesso modo si dimostra la 2ª delle (1)'. Dunque gli elementi che hanno per parametri numeri interi positivi o negativi si ottengono esattamente con forme armoniche costruite *con una legge determinata* a partire dai tre elementi fondamentali A_∞, A_0, A_1.

Consideriamo ora un parametro frazionario qualunque, che noi supponiamo positivo. Esso sarà della forma:

$$r + \frac{t}{p},$$

ove $\frac{t}{p}$ è una frazione propria ed r numero intero positivo.

Intanto se sia:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= \left(A_r\, A_{r+1}\, A_\infty\, A_{r+\frac{1}{2}}\right) = \\ &\left(A_r\, A_{r+\frac{1}{2}}\, A_{r+1}\, A_{r+\frac{1}{3}}\right) = \ldots = \\ &\left(A_r\, A_{r+\frac{1}{p-1}}\, A_{r+\frac{1}{p-2}}\, A_{r+\frac{1}{p}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

si avrà appunto:

$$\left(A_\infty\, A_0\, A_1\, A_{r+\frac{1}{p}}\right) = r + \frac{1}{p}.$$

Infatti sarà:

$$\frac{r+1-\mu}{r-\mu} = -1,$$

indicando con μ il parametro di $A_{r+\frac{1}{2}}$; onde risulta subito:

$$\mu = r + \frac{1}{2}.$$

Quindi:

$$\frac{r-(r+1)}{r+\frac{1}{2}-(r+1)} : \frac{r-\mu}{r+\frac{1}{2}-\mu} = -1,$$

μ essendo il parametro di $A_{r+\frac{1}{3}}$ si ricava appunto:

$$\mu = r + \frac{1}{3}$$

e così via.

Ora io dico che costruendo le forme armoniche:

$$\left.\begin{aligned}(-1) = &\left(A_\infty\, A_{r+\frac{1}{p}}\, A_r\, A_{r+\frac{2}{p}}\right)\\ &\left(A_\infty\, A_{r+\frac{2}{p}}\, A_{r+\frac{1}{p}}\, A_{r+\frac{3}{p}}\right) =\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\left(A_\infty\, A_{r+\frac{t-1}{p}}\, A_{r+\frac{t-2}{p}}\, A_{r+\frac{t}{p}}\right)\end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

si avrà appunto:

$$\left(A_\infty\, A_0\, A_1\, A_{r+\frac{t}{p}}\right) = r + \frac{t}{p}.$$

Infatti sia μ il parametro di $A_{r+\frac{2}{p}}$ sarà allora:

$$\frac{r+\frac{1}{p}-\mu}{r+\frac{1}{p}-r}=-1$$

onde senz'altro

$$\mu = r+\frac{2}{p}$$

e così via.

Le serie (I) (II) (III) di forme armoniche e le corrispondenti serie formate cogli elementi indicati con lettera A affetta dai corrispondenti indici razionali e negativi, dànno una legge determinata colla quale si può costruire esattamente con un numero finito di forme ogni elemento di parametro razionale positivo o negativo. Se poi il parametro K dell'elemento A_k a cui si vuole giungere con forme armoniche è un numero irrazionale, definito come *limite* da due serie:

$$r+\frac{s}{p},\quad r+\frac{t}{pq},\quad r+\frac{m}{pqr}\dots$$

$$r+\frac{s+1}{p},\quad r+\frac{t+1}{pq},\quad r+\frac{m+1}{pqr}\dots$$

di numeri che si corrispondono nelle due serie in modo che la differenza $\frac{1}{pqr\dots}$ di due numeri corrispondenti può diventare minore di qualunque numero assegnabile, allora all'elemento A_k

ci accosteremo indefinitamente costruendo gli elementi i cui parametri razionali si avvicinino, per definizione, al numero incommensurabile k.

Ed ammettendo la continuità dei numeri reali unitamente, come abbiamo già detto, alla continuità degli elementi di una forma fondamentale di 1ª specie resta evidentemente compiuta la dimostrazione del teorema di Standt.

10. Le rette del piano S_2 rappresentate dalle equazioni:

$$x_r = o \ (r = 1, 2, 3)$$

saranno le *rette fondamentali* a_r $(r = 1, 2, 3)$ del piano stesso; ed i punti A_r $(r = 1, 2, 3)$:

$$A_1 = a_2 a_3, \quad A_2 = a_3 a_1, \quad A_3 = a_1 a_2,$$

rappresentati da

$$\xi_r = o \ (r = 1, 2, 3)$$

di intersezione di queste rette a_r, a due a due, saranno i punti fondamentali. A questi aggiungiamo il punto E di coordinate $x_1 = x_2 = x_3$ eguali; e la retta e di coordinate eguali che diremo *punto e retta unità.* Dati il triangolo

$$A_1 A_2 A_3 = a_1 a_2 a_3$$

ed il punto E resta determinata la retta e. Ed invero le projezioni di E sopra i lati a_1, a_2, a_3 sono i punti E_r rispettivamente di coordinate:

$$x_1 = o, \ x_2 = x_3; \quad x_2 = o, \ x_3 = x_1; \quad x_3 = o, \ x_1 = x_2$$

quindi la retta e essendo rappresentata dall'equazione:

$$x_1 + x_2 + x_3 = o$$

è quella che contiene i *conjugati anarmonici* di E_1, E_2, E_3 rispetto ad $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$. Correlativamente dato $A_1 A_2 A_3$ ed e si troverebbe E.

Per la definizione data di rapporto anarmonico, si ha che i rapporti anarmonici dei tre fasci:

$$A_1 (A_2 A_3 E M)$$

$$A_2 (A_3 A_1 E M)$$

$$A_3 (A_1 A_2 E M)$$

sono rispettivamente:

$$\frac{x_2}{x_3}, \quad \frac{x_3}{x_1}, \quad \frac{x_1}{x_2}$$

essendo x_1, x_2, x_3 le coordinate del punto M. E similmente i rapporti anarmonici delle tre punteggiate:

$$a_1 (a_2 a_3 e m)$$

$$a_2 (a_3 a_1 e m)$$

$$a_3 (a_1 a_2 e m)$$

sono

$$\frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1}, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

essendo ξ_1, ξ_2, ξ_3 le coordinate della retta m.

Ritorniamo quindi all'espressioni dei rapporti delle coordinate con rapporti anarmonici, come sí ottiene partendo dalle nozioni elementari dell'ordinaria geometria del piano.

Soltanto possiamo dire che rispetto agli elementi fondamentali del piano un punto ed una retta dati per le loro coordinate si possono costruire con successive forme armoniche partendo dagli elementi fondamentali stessi del piano.

§ 1. Determinazione analitica della posizione dei punti, dei piani e delle rette. Superficie e linee gobbe. Trasformazione delle coordinate.

1. Anche per lo Spazio possiamo seguire, come pel piano, due vie differenti per porre le nozioni fondamentali delle Geometria analitica dello spazio stesso.

Partiamo dapprima dal concetto ordinario dello spazio, ammettendo gli assiomi della Geometria Euclidea e la definizione data di elementi all'infinito della retta e del piano. Queste definizioni conducono a concludere che gli elementi (punti e rette) all'infinito dello spazio sono in un piano. Ed invero, i punti all'infinito delle rette dello spazio sono distribuiti nelle rette all'infinito dei piani dello spazio stesso; ora queste rette hanno evidentemente a due a due un punto in comune senza tutte passare per lo stesso punto, sono adunque a ritenersi in un piano che noi diremo *piano all'infinito*.

Le operazioni della Geometria del piano sono *la proiezione da un centro e la sezione con una retta*. Nello spazio oltre di queste operazioni abbiamo la *proiezione da un asse, e la sezione con un piano*. Proiettare da un asse una figura composta di punti, significa costruire i piani che uniscono l'asse coi punti della figura. Si ottengono in tal modo tanti piani (proiettanti) passanti per una stessa retta che diconsi costituire *un fascio di piani*. Nello spazio possiamo proiettare da un centro una figura composta di punti e di rette, con che si ottengono raggi e piani proiettanti passanti per un punto fisso, centro di proiezione. Questa figura dicesi *stella* di raggi e di piani; il centro di proiezione è il *centro* della stella. La stella ed il sistema piano diconsi forme fondamentali di 2ª specie. Tagliare con un piano una figura composta di rette e di piani significa trovare le intersezioni del piano colle rette e coi piani della figura. Quindi tagliando una stella di raggi e di piani si ottiene un sistema piano, e proiettando da un centro fuori del piano un sistema piano si ottiene una stella.

Nello spazio abbiamo tre forme fondamentali di 1ª specie che sono là punteggiata, il fascio di raggi, il fascio di piani. Dalla punteggiata si ricavano le altre due forme rispettivamente colla proiezione da un centro e da un asse.

2. Nello spazio ha luogo il *principio di dualità*, che nasce dallo scambio fra di loro degli elementi *punto* e *piano*, mediante i quali lo spazio è costituito come forma fondamentale di 3ª specie, cioè come *Spazio lineare di tre dimensioni*. Vedremo appunto come in tutte le costruzioni seguenti si verifica il detto principio. Ciò posto, siano A_1, A_2, A_3, A_4, E cinque punti dello spazio, quattro qualunque dei quali non posti in uno stesso piano. Ponendo:

$$A_2 A_3 A_4 = \alpha_1, \qquad A_3 A_1 A_4 = \alpha_2,$$
$$A_1 A_2 A_4 = \alpha_3, \qquad A_1 A_2 A_3 = \alpha_4,$$

i punti A_r e i piani $\alpha_r (r = 1, 2, 3, 4)$ saranno i vertici e le faccie di uno stesso *tetraedro* Δ; essendo α_r, A_r una faccia ed un vertice fra loro *opposti*. Projettiamo ora da ciascun vertice A_r sulla sua faccia opposta α_r, il punto E; otterremo con ciò sui piani α_1, α_2, α_3, α_4 rispettivamente i punti E_1, E_2, E_3, E_4.

Ogni punto E_r avrà la sua retta polare e_r (vedi *Geometria analitica del piano*) rispetto al triangolo di Δ che si trova nella faccia α_r. Le 4 rette e_r a due a due si segano sicchè esse sono poste in uno stesso piano ε che si dice il *piano polare* di E rispetto al tetraedro Δ.

Il piano ε_r che dal vertice A_r projetta la retta e_r di α_r, non è altro che il piano polare del raggio $A_r E_r$ rispetto al triedro di Δ che ha il vertice in A_r. Dato il piano ε resta così determinato il suo *polo* E rispetto a Δ; giacchè i raggi $A_r E_r$ polari, rispetto ai triedri A_r di Δ, dei piani projettanti le traccie $\alpha_r \varepsilon$, sono a due a due in un piano senza essere tutti in uno stesso piano e quindi si segano nel punto E polo del piano ε rispetto al tetraedro Δ. Ciò posto:

3. Se μ è un piano dello spazio non passante pel vertice A_4 di Δ, determina sui tre spigoli di Δ che passano per quel vertice i tre punti:	Se M sia un punto dello spazio fuori della faccia α_4 di Δ determina coi tre spigoli di Δ che si trovano in quella faccia i tre piani:

$\alpha_2 \alpha_3 \mu, \quad \alpha_3 \alpha_1 \mu, \quad \alpha_1 \alpha_2 \mu.$

Per un piano qualunque μ non passante per A_4 saranno quindi determinate le tre punteggiate (in generale, ciascuna di 4 elementi):

$$\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_4 \varepsilon \mu)$$
$$\alpha_3 \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_4 \varepsilon \mu)$$
$$\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3 \alpha_4 \varepsilon \mu).$$

Se chiamiamo in generale $\mathbf{M}_{rs}$ la intersezione di un piano μ collo spigolo $\alpha_r \alpha_s$ di Δ i rapporti anarmonici delle 3 punteggiate considerate sono:

$$(A_4 A_1 \mathbf{E}_{14} \mathbf{M}_{14}) = K_1 = \frac{\xi_1}{\xi_4}$$

$$(A_4 A_2 \mathbf{E}_{24} \mathbf{M}_{24}) = K_2 = \frac{\xi_2}{\xi_4}$$

$$(A_4 A_3 \mathbf{E}_{34} \mathbf{M}_{34}) = K_3 = \frac{\xi_3}{\xi_4}$$

Viceversa dati gli elementi α_r, ε ossia dato il tetraedro Δ ed il piano ε; e dati i numeri

$A_2 A_3 M, \quad A_3 A_1 M,$
$A_1 A_2 M.$

Per un punto qualunque M fuori di α_4 saranno quindi determinati i tre fasci (in generale di 4 piani ciascuno):

$$A_2 A_3 (A_1 A_4 E M)$$
$$A_3 A_1 (A_2 A_4 E M)$$
$$A_1 A_2 (A_3 A_4 E M).$$

Se chiamiamo ora in generale M_{rs} la projezione del punto M fatta dallo spigolo di Δ opposto ad $A_r A_s$, i rapporti anarmonici dei 3 fasci considerati sono:

$$(A_1 A_4 E_{14} M_{14}) = k_1 = \frac{x_1}{x_4}$$

$$(A_2 A_4 E_{24} M_{24}) = k_2 = \frac{x_2}{x_4}$$

$$(A_3 A_4 E_{34} M_{34}) = k_3 = \frac{x_3}{x_4}$$

Viceversa dati gli elementi A_r, E cioè il tetraedro Δ ed il punto E; e dati i numeri

K_r, ossia i numeri ξ_r, resta determinato il piano μ come quello che passa per tre punti individuati dai numeri K_r. Gli elementi dati α_r, ε si dicono gli elementi *fondamentali* o di *riferimento*; e i numeri K_s sono i *parametri* del piano μ relativi a quegli elementi fondamentali, mentre i numeri

$$\xi_r \, (r = 1, 2, 3, 4)$$

si dicono le *coordinate omogenee* del piano μ. Tutti i numeri per cui sia:

$$\xi'_r = \rho \, \xi_v \, (r = 1, 2, 3, 4)$$

essendo ρ un numero arbitrario determinano lo stesso piano μ.

Per i piani che passano rispettivamente per i vertici A_1, A_2, A_3 senza passare per A_4 si ha:

$$k_r \, (r = 1, 2, 3)$$

oppure i numeri

$$x_r \, (r = 1, 2, 3, 4)$$

resta determinato il punto M come intersezione di tre piani individuati dai numeri K_r. Gli elementi dati A_r, E si dicono gli elementi *fondamentali* o *di riferimento*; e i numeri k_r sono i *parametri* del punto M relativi agli elementi fondamentali assunti; mentre i numeri

$$x_r \, (r = 1, 2, 3, 4)$$

si dicono *le coordinate omogenee proiettive* del punto M. Tutti i numeri per cui sia:

$$x_r' = \rho \, x_r \, (r = 1, 2, 3, 4)$$

essendo ρ un numero arbitrario determinano lo stesso punto M.

Per i punti che cadono rispettivamente nei piani α_1, α_2, α_3 senza cadere in α_4 si ha:

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0$$

rispettivamente, ossia:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0$$

e le altre tre coordinate del piano non sono altro che le coordinate omogenee projettive (v. *Geom. anal. del piano*) del piano stesso quando nelle stelle A_1, A_2, A_3 si assumano rispettivamente per piani fondamentali le quaderne:

$$\alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \varepsilon_1$$
$$\alpha_3 \ \alpha_1 \ \alpha_4 \ \varepsilon_2$$
$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_4 \ \varepsilon_3$$

ove i piani ε_r sono i piani unità.

Ora come per i piani che passano per gli spigoli fondamentali

$$\alpha_2 \alpha_3, \quad \alpha_3 \alpha_1, \quad \alpha_1 \alpha_2$$

così per qualunque piano passante per il vertice A_4 si ha sempre

$$\xi_4 = 0$$

e per le altre tre co-

$$k_1 = 0, \ k_2 = 0, \ k_3 = 0$$

rispettivamente, ossia:

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0$$

e le altre tre coordinate del punto non sono altro che le coordinate omogenee projettive del punto stesso (v. *Geom. anal. del piano*) quando nei piani α_1, α_2, α_3 si assumano rispettivamente per punti fondamentali le quaderne:

$$A_2 \ A_1 \ A_4 \ E_1$$
$$A_3 \ A_1 \ A_4 \ E_2$$
$$A_1 \ A_2 \ A_4 \ E_3$$

ove i punti E_r sono i punti unità.

Ora come per i punti delle rette fondamentali

$$A_2 A_3, \quad A_3 A_1, \quad A_2 A_4$$

si ha appunto $x_4 = 0$, anche se il punto M cade in α_4 si ha sempre

$$x_4 = 0$$

e per altre tre coordiordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 del piano si assumeranno quelle che le competono prendendo per piani fondamentali della stella A_4 di piani la quaderna di piani:

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \varepsilon_4$$

essendo ε_4 il piano unità.

In tal modo ogni terna di numeri costituisce una terna di parametri di un piano determinato dai parametri stessi: ossia ogni quaderna di numeri costituisce la quaderna di coordinate omogenee di un piano determinato dalle coordinate stesse.

Viceversa poi ad ogni piano dello spazio è coordinata una terna di numeri come parametri; e infinite quaderne di numeri come coordinate omogenee del piano.

In particolare il piano fondamentale α_r ha la coordinata ξ_r differente

nate x_1, x_2, x_3 del punto assumere quelle che si ottengono quando per punti fondamentali del piano α_4 la quaderna di elementi:

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad E_4$$

essendo E_4 il punto unità.

In tal modo ogni terna di numeri costituisce una terna di parametri di un punto determinato dai parametri stessi; ossia ogni quaderna di numeri costituisce una quaderna di coordinate di un punto determinato dalle coordinate stesse.

Viceversa poi ad ogni punto dello spazio è coordinata una terna di numeri come parametri; e infinite quaderne di numeri come coordinate omogenee del punto.

In particolare il punto fondamentale A_r ha la coordinata x_x differente da zero, e le altre nulle, onde possiamo prendere per coordinate dei piani α_1, α_2, α_3, α_4 rispettivamente le quaderne di numeri:

$$1, 0, 0, 0$$
$$0, 1, 0, 0$$
$$0, 0, 1, 0$$
$$0, 0, 0, 1.$$

Il piano ε ha i suoi parametri $K_r = 1$; e le sue coordinate eguali, onde possiamo prendere per coordinate di quel piano i numeri:

$$1, 1, 1, 1.$$

Gli è perciò che ε dicesi il piano unità del sistema di coordinate.

da zero, e le altre nulle: onde possiamo prendere rispettivamente per coordinate dei punti A_1, A_2, A_3 le quaderne dei numeri:

$$1, 0, 0, 0$$
$$0, 1, 0, 0$$
$$0, 0, 1, 0$$
$$0, 0, 0, 1.$$

Il punto E ha i parametri $K_r = 1$ e le sue coordinate eguali, onde possiamo prendere per coordinate di quel punto i numeri:

$$1, 1, 1, 1.$$

Gli è perciò che E dicesi il punto unità del sistema di coordinate.

4. Sostanzialmente degli elementi di riferimento non ne abbiamo che cinque distinti; poichè i cinque punti fondamentali determinano i cinque piani fondamentali e viceversa. Osserviamo poi che il dire che un punto M o un piano μ e determinato dai suoi tre parametri rispetto agli elementi fondamentali, per le costruzioni che si debbono fare onde ottenere il punto o il piano stesso, equivale al dire che un punto o un piano è determinato quando sia *assoggettato a tre condizioni distinte* cioè ogni qualvolta noi veniamo a fissare il valore di uno dei tre parametri di un punto o di un piano veniamo anche ad assoggettare quel punto o quel piano *ad una condizione geometrica* dicendo che un punto od un piano è assoggettato ad una condizione geometrica se il punto deve giacere in un dato piano o se il piano deve passare per un dato punto.

Lo spazio ordinario è a dirsi *spazio a tre dimensioni* perchè il suo elemento generatore è determinato da tre numeri, ossia da tre *condizioni* dicendo così che un elemento è assoggettato ad una condizione analitica, quando uno dei parametri che lo fissano debba avere un determinato valore.

5. Possiamo, nello spazio ordinario, concepire spazii di punti e di piani a due dimensioni ad una dimensione, quelli per cui bastano due od una sola condizione a determinarne ogni elemento: ossia quelli per i quali i parametri dei loro elementi sono legati da una o da due relazioni. Tali relazioni si dicono le *equazioni* degli spazii così determinati; e se le relazioni fra i parametri sono equazioni algebriche nei parametri stessi gli spazii da esse rappresentati si dicono algebrici. Noi considereremo in generale alcuni spazii continui di punti o di piani di cui bastano due od una sola condizione geometrica per determinare la posizione, cioè considereremo spazii rappresentati analiticamente da una o da due equazioni simultanee ed algebriche nei parametri dell'elemento generatore, Stabiliremo così le seguenti definizioni.

Uno spazio di punti a due dimensioni sarà propriamente detto una *superficie-luogo* o semplicemente una *superficie*.

Uno spazio di punti ad una sola dimensione sarà detto una *curva dello spazio* o una *curva gobba*; e quando gli elementi di quello spazio siano in uno stesso piano si ha ancora una curva piana.

Uno spazio di piani a due dimensioni sarà più propriamente detto una *superficie-inviluppo*.

Uno spazio di piani ad una dimensione sarà detto una *superficie sviluppabile - inviluppo* o brevemente un *fascio gobbo di piani*; e quando i piani del fascio passano per uno stesso punto si ha il *fascio di piani della stella* cioè il *cono-inviluppo*.

6. Vedremo fra poco che il piano ci dà l'esempio più semplice di spazio di punti a due dimensioni; cioè di *superficie*, e il punto considerato come inviluppo dei varii piani che passano per esso, ossia come si suol dire un *punto-inviluppo* ci dà l'esempio più semplice di spazio di piani a due dimensioni. La retta come luogo di punti e come inviluppo di piani ci dà l'esempio più semplice rispettivamente di linea e di sviluppabile inviluppo.

Infatti, sia intanto in generale f una forma quaternaria dell'ordine n nelle variabili x_r, o ξ_r

coordinate dì un punto o di un piano, ossia sia f una funzione omogenea razionale intera del grado M nelle variabili x_r, o ξ_r, l'equazione

$$f = 0$$

ci rappresenterà uno spazio *algebrico a due dimensioni* cioè propriamente una superficie algebrica se lo spazio è composto di punti; invece una superficie inviluppo se lo spazio è composto di piani.

I più semplici spazii algebrici a due dimensioni sono dunque quelli dati dall' equazione :

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + x_4 \xi_4 = 0 \qquad \text{(I)}$$

secondo che si considerano le x_r o le ξ_r come variabili; e dico che tali spazii rono rispettivamente il *piano* ed il *punto-inviluppo.* In altri termini l'equazione scritta rappresenta il piano di coordinate ξ_r se in essa vi consideriamo variabili le x_r; e invece ci rappresenta come inviluppo il punto di coordinate x_r se in essa riguardiamo variabili le ξ_r. Ed invero sia dunque μ il piano di coordinate ξ_r e quindi

$$(A_4\, A_1\, \mathbf{E}_{14}\, \mathbf{M}_{14}) = \frac{\xi_1}{\xi_4}$$

$$(A_4\, A_2\, \mathbf{E}_{24}\, \mathbf{M}_{14}) = \frac{\xi_2}{\xi_4}$$

$$(A_4\, A_3\, \mathbf{E}_{34}\, \mathbf{M}_{34}) = \frac{\xi_1}{\xi_4}.$$

I parametri $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}$ determinano per la (1) il parametro $\frac{x_3}{x_4}$ e quindi un punto M_0; indichiamo ora con M il punto ove l'intersezione dei piani passanti rispettivamente per $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ determinati dai parametri $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$ assunti, sega il piano μ; e siano così x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate del punto M. Vedremo che il punto M coincide con M_0. Infatti si ha:

$$(A_1 A_4 E_{14} M_{14}) = \frac{x_1}{x_4}$$

$$(A_2 A_4 E_{24} M_{24}) = \frac{x_2}{x_4}$$

$$(A_3 A_4 E_{34} M_{34}) = \frac{x_3}{x_4},$$

e per essere:

$$-1 = (A_1 A_4 \mathbf{E}_{14} E_{14})$$

$$-1 = (A_2 A_4 \mathbf{E}_{24} E_{24})$$

$$-1 = (A_3 A_4 \mathbf{E}_{34} E_{34})$$

si ottiene:

$$-\frac{\xi_1}{\xi_4} = (A_4 A_1 E_{14} \mathbf{M}_{14})$$

$$-\frac{\xi_2}{\xi_4} = (A_4 A_1 E_{24} \mathbf{M}_{24})$$

$$-\frac{\xi_3}{\xi_4} = (A_4 A_3 E_{34} \mathbf{M}_{34})$$

e quindi:

$$-\frac{x_1\,\xi_1}{x_4\,\xi_4} = (A_1\,A_4\,\mathbf{M}_{14}\,M_{14})$$

$$-\frac{x_2\,\xi_2}{x_4\,\xi_4} = (A_2\,A_4\,\mathbf{M}_{24}\,M_{24})$$

$$-\frac{x_3\,\xi_3}{x_4\,\xi_4} = (A_3\,A_4\,\mathbf{M}_{34}\,M_{34}).$$

Sia M' il punto d'incontro dei piani $A_2\,A_3\,A_4$, $A_1\,A_4\,M$, μ; e sia, in generale, M_r la projezione del punto M fatto dal vertice A_r di Δ sulla faccia α.

Immaginando la figura, avuto riguardo alle notazioni già usate, si ha

$$(A_2\,A_3\,\mathbf{M}_{14}\,M_{14}) = (M_1\,A_4\,M'\,M_{23}) = (A_4\,M_1\,M_{23}\,M')$$

e quindi:

$$(A_1A_4\mathbf{M}_{14}M_{14}) + (A_4\,M_{33}\,M_1\,M') = 1. \qquad (2)$$

Siano ora M'_{34}, M'_{24} le projezioni di M' fatte rispettivamente dai centri A_2, A_3 sulle rette $A_3\,A_4$, $A_1\,A_4$; avremo

$$\left.\begin{aligned}(A_4\,M_{23}\,M_1\,M') = (A_4\,A_3\,M_{34}\,M'_{34}) = \\ (A_4\,A_2\,M_{24}\,M'_{24})\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

od anche:

$$(A_2\,A_4\,\mathbf{M}_{24}\,M'_{24}) = (M'_{34}\,A_4\,\mathbf{M}_{34}\,A_3)$$

onde

$$(A_2\,A_4\,\mathbf{M}_{14}\,M'_{24}) + (A_4\,A_3\,M'_{34}\,\mathbf{M}_{34}) = 1.$$

Moltiplicando ciascun termine di quest'ultima per i rapporti anarmonici eguali (3), si ottiene:

$$(A_4 M_{23} M_1 M') = (A_2 A_4 \mathbf{M}_{24} M'_{24}) + (A_3 A_4 \mathbf{M}_{34} M'_{34})$$

e sostituendo nella (2) in luogo del rapporto anarmonico $(A_2 M_{23} M_1 M')$ il suo valore dato dall'ultima si otterrà

$$(A_1 A_4 \mathbf{M}_{14} M_{14}) + (A_2 A_4 \mathbf{M}_{24} M_{24}) + (A_3 A_4 \mathbf{M}_{34} M_{34}) = 1$$

epperò fra le coordinate x_r del punto M, e le coordinate ξ_r del piano μ contenente il punto M si ha la relazione

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + x_4 \xi_4 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Dunque il punto M del piano di coordinate x_r coincide col punto M_0: cioè una relazione lineare omogenea (1) rappresenta il piano, di coordinate ξ_r se in essa riguardiamo variabili le x_r e costanti date le ξ_r; e invece rappresenta un punto-inviluppo di coordinate x_r se in essa relazione riguardiamo variabili le ξ_r e costanti date le x_r.

In altri termini il piano punteggiato, e il punto-inviluppo sono gli spazii algebrici più semplici di due dimensioni. Così in particolare i piani fondamentali α_r, hanno per equazioni:

$$x_r = 0 \; (r = 1, 2, 3, 4)$$

ed i punti fondamentali A_r hanno per equazioni

$$\xi_r = 0 \; (r = 1, 2, 3, 4).$$

Come si è detto pel piano così poi vale per lo spazio cioè:

Le coordinate x_x di un punto sono numeri proporzionali alle distanze del punto dalle quattro faccie del tetraedro fondamentale, misurate colle distanze che il punto unità E ha dalle faccie stesse, lungo quattro direzioni arbitrarie fisse.

Correlativamente:

Le coordinate ξ_r di un piano sono numeri proporzionali alle distanze dai vertici del tetraedro fondamentale al piano dato, misurate colle distanze che in quattro direzioni fisse partono dai 4 vertici al piano unità.

7. Se $f = 0$, $\varphi = 0$ sono due forme quaternarie degli ordini n, m rispetto nelle variabili x_r, i punti le cui coordinate soddisfanno alle due equazioni si diranno formare una *curva algebrica* intersezione delle due superficie algebriche date dall'equazioni stesse. In particolare se:

$$\alpha_x = 0 \quad \beta_x = 0$$

sono le equazioni di due piani α, β di coordinate α_r, β_r rispettivamente, sarà:

$$\alpha_x + \lambda\,\beta_x = 0$$

per ogni valore di λ l'equazione di un piano passante per la retta $\alpha\beta$; cosicchè variando λ da $-\infty$ e $+\infty$ otterremo il fascio di piani che ha per asse la retta

$$a_\xi = 0 \quad b_\xi = 0$$

sono le equazioni di due punti A, B inviluppi, di coordinate a_r, b_r rispettivamente, allora l'equazione

$$a_\xi + \lambda\,b_\xi = 0$$

per ogni valore di λ rappresenta come inviluppo un punto della retta AB; e variando λ da $-\infty$ a $+\infty$ si ottengono i varii punti della retta AB. Le coor-

$\alpha\beta$. Le coordinate ξ_r di un piano qualunque passante per la retta $\alpha\beta$ saranno dunque date dalle formole

$$\xi_r = \alpha_r + \lambda\beta_r (r = 1, 2, 3, 4);$$

e il rapporto anarmonico dei quattro piani determinati dai valori

$$\lambda_r (r = 1, 2, 3, 5)$$

di λ sarà

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$$

poichè tale rapporto anarmonico non è altro che quello delle traccie dei 4 piani sopra uno dei piani fondamentali α_r.

Così per riferire projettivamente due fasci di piani dati dall'equazioni

$$\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$$

$$\gamma_x + \mu\delta_x = 0$$

basterà porre fra i parametri λ, μ la solita relazione bilineare

dinate x_r di un punto qualunque della retta AB saranno dunque date dalle formole:

$$x_r = a_r + \lambda b_r (r = 1, 2, 3, 4);$$

e il rapporto anarmonico dei quattro punti determinati dai valori

$$\lambda_r (r = 1, 2, 3, 4)$$

di λ sarà

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$$

poichè tale rapporto anarmonico non è altro che quello dei 4 raggi che projettano i 4 punti della retta AB da uno dei punti fondamentali A_r.

Così per riferire projettivamente due punteggiate date dall'equazioni

$$a_\xi + \lambda b_\xi = 0$$

$$e_\xi + \mu d_\xi = 0$$

basterà porre fra i parametri λ, μ la relazione bilineare

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

Eliminando i parametri λ, μ fra le tre equazioni ora scritte si ottiene la relazione

$$A\alpha_x\gamma_x - B\alpha_x\delta_x - C\gamma_x B_x + D B_x\delta_x = 0$$

che rappresenta la superficie luogo dei raggi intersezioni dei piani corrispondenti nei due fasci projettivi dati di piani.

Se le due rette $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ si tagliassero in un punto allora l'equazione ottenuta ci rappresenterebbe un *cono quadrico*.

8. Fra i piani che passano per la retta $\alpha\beta$ vi sono i piani che la projettano rispettivamente dai punti fondamentali A_r e che hanno per equazioni

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

Eliminando i parametri λ, μ fra le tre equazioni ora scritte si ottiene la relazione

$$A a_\xi c_\xi - B a_\xi d_\xi - C c_\xi b_\xi + D b_\xi d_\xi = 0$$

che rappresenta l'inviluppo algebrico formato dai piani che inviluppano le rette congiungenti i punti corrispondenti delle punteggiate projettive date.

Se le rette AB, CD fossero in un piano allora l'equazione ottenuta ci rappresenterebbe una conica come inviluppata dai suoi piani tangenti.

Fra i punti della retta AB ci sono le traccie di essa retta sui piani fondamentali α_r, e che hanno rispettivamente per equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_{12}x_2 - \pi_{31}x_3 + \pi_{14}x_4 = 0\\ \pi_{23}x_3 - \pi_{12}x_1 + \pi_{24}x_4 = 0\\ \pi_{31}x_1 - \pi_{23}x_2 + \pi_{34}x_4 = 0\\ \pi_{14}x_1 + \pi_{24}x_2 + \pi_{34}x_3 = 0\end{array}\right\}\text{(I)}$$

ove si è posto, in generale:

$$\pi_{rs} = \alpha_r \beta_s - \alpha_s \beta_r.$$

In virtù della relazione identica:

$$\left.\begin{array}{r}\pi_{23}\pi_{14} + \pi_{31}\pi_{24} + \\ + \pi_{12}\pi_{34} = 0\end{array}\right\}\text{(I)}$$

due qualunque delle equazioni scritte sono conseguenza delle altre due; e appunto due sole bastano a determinare la retta $\alpha\beta$. Reciprocamente sei numeri π_{rs} che soddisfanno alla (I); e tutti i numeri

$$\pi'_{rs} = \rho\,\pi_{rs},$$

proporzionali ad essi, sono atti a determinare per le (I) una retta di posizione, come intersezione di due piani; diremo per ciò i numeri

$$\left.\begin{array}{l}p_{12}\xi_2 - p_{31}\xi_3 + p_{14}\xi_4 = 0\\ p_{23}\xi_3 - p_{12}\xi_1 + p_{24}\xi_4 = 0\\ p_{31}\xi_1 - p_{23}\xi_2 + p_{34}\xi_4 = 0\\ p_{14}\xi_2 + p_{24}\xi_2 + p_{34}\xi_3 = 0\end{array}\right\}\text{(I)}$$

ove si è posto, in generale:

$$p_{rs} = a_r b_s - a_s b_r.$$

In virtù dell'identità:

$$\left.\begin{array}{r}p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + \\ + p_{12}p_{34} = 0\end{array}\right\}\text{(I)}$$

due qualunque delle equazioni scritte sono conseguenza delle altre due; e appunto due sole bastano a determinare la retta AB. Reciprocamente poi sei numeri p_{rs} che soddisfacciano alla (I); e tutti i numeri

$$p'_{rs} = \rho\,p_{rs}$$

ad essi proporzionali sono atti a determinare per le (I) di posizione una retta, come congiungente due punti; diremo perciò i numeri

π'_{rs} le *coordinate omogenee* tangenziali della retta da essi individuata.

p'_{rs} le *coordinate omogenee locali* della retta da essi determinata.

9. Trovando di una retta $\alpha\beta$ le coordinate delle due traccie sui piani fondamentali $x_r = 0$; e volendo che tali traccie coincidano con quelle della retta AB, si troveranno le eguaglianze:

$$\left.\frac{p_{23}}{\pi_{14}} = \frac{p_{31}}{\pi_{24}} = \frac{p_{12}}{\pi_{34}} = \frac{p_{14}}{\pi_{23}} = \frac{p_{24}}{\pi_{31}} = \frac{p_{34}}{\pi_{12}}\right\} \quad \text{(I)}$$

che esprimono adunque le relazioni perchè i numeri p_{rs}, π_{rs} siano rispettivamente le coordinate locali e tangenziali di una stessa retta $\alpha\beta = AB$.

Se p_{rs}, π_{rs}; p'_{rs}, π'_{rs}, sono le coordinate locali e tangenziali di due rette $AB = \alpha\beta$, $A'B' = \alpha'\beta'$, la relazione:

$$\left.\begin{aligned}(p\,p') = p_{23}\,p'_{14} + p_{31}\,p'_{24} + p_{12}\,p'_{34} + \\ + p_{14}\,p'_{23} + p_{24}\,p'_{31} + p_{34}\,p'_{12} = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

esprime la condizione perchè le due rette AB, $A'B'$ siano in un piano ossia si tagliano.

Infatti se y_r, z_r; y'_r, z'_r sono le coordinate di due punti di AB e di $A'B'$ la relazione:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \end{vmatrix} = 0$$

esprime la condizione perchè i quattro punti

Y, Z; Y', Z' siano in un piano epperò sviluppando il determinante per prodotti di determinante di 2° ordine si ottiene adunque la condizione richiesta che è la (II).

La stessa relazione si può esprimere per mezzo delle coordinate tangenziali delle due rette sotto la forma:

$$(\pi\,\pi') = 0$$

e finalmente per le coordinate tangenziali dell'una e locali dell'altra sotto la forma

$$\left.\begin{array}{r} \Sigma\, p_{rs}\pi'_{rs} = 0, \\ \text{od anche:} \\ \Sigma\, p'_{rs}\,\pi_{rs} = 0 \end{array}\right\}\ rs = 23, 31, 12, 14, 24, 34.$$

Da ultimo risultano facilmente le formole:

$$\begin{aligned}
\rho\, x_1 &= \gamma_2\,\pi_{34} - \gamma_3\,\pi_{24} + \gamma_4\,\pi_{23} = \gamma_2\,p_{12} - \gamma_3\,p_{31} + \gamma_4\,p_{14} \\
\rho\, x_2 &= \gamma_3\,\pi_{14} - \gamma_1\,\pi_{34} + \gamma_4\,\pi_{31} = \gamma_3\,p_{23} - \gamma_1\,p_{12} + \gamma_4\,p_{24} \\
\rho\, x_3 &= \gamma_1\,\pi_{24} - \gamma_2\,\pi_{14} + \gamma_4\,\pi_{12} = \gamma_1\,p_{31} - \gamma_2\,p_{23} + \gamma_4\,p_{34} \\
-\rho\, x_4 &= \gamma_1\,\pi_{23} + \gamma_2\,\pi_{31} + \gamma_3\,\pi_{12} = \gamma_1\,p_{14} + \gamma_2\,p_{24} + \gamma_3\,p_{34}
\end{aligned}$$

che dànno le coordinate x_r del punto comune alla retta $\alpha\beta = A\,B$ ed al piano γ di coordinate γ_r; ossia dànno le coordinate x_r del punto comune a tre piani α, β, γ.

Sostituendo nelle formole scritte alle coordinate di punti quelle di piani e viceversa, si otterranno le espressioni delle coordinate ξ_r del piano determinato da un punto A e da una retta $A\,B$, ossia del piano dei tre punti $A\,B\,C$.

10. Supponiamo ora che il piano fondamentale

α_4 sia il *piano all'infinito;* tenendo le notazioni già usate per le coordinate x_r di un punto M e le coordinate ξ_r di un piano μ, avremo:

$$(\infty A_4 E_{14} M_{14}) = \frac{A_4 M_{14}}{A_4 E_{14}} = \frac{x_1}{x_4}$$

$$(\infty A_4 E_{24} M_{24}) = \frac{A_4 M_{24}}{A_4 E_{24}} = \frac{x_2}{x_4}$$

$$(\infty A_4 E_{34} M_{34}) = \frac{A_4 M_{34}}{A_4 E_{34}} = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(A_4 \infty \mathbf{E}_{14} \mathbf{M}_{14}) = \frac{1}{\dfrac{A_4 \mathbf{M}_{14}}{A_4 \mathbf{E}_{14}}} = \frac{\xi_1}{\xi_4}$$

$$(A_4 \infty \mathbf{E}_{24} \mathbf{M}_{24}) = \frac{1}{\dfrac{A_4 \mathbf{M}_{24}}{A_4 \mathbf{E}_{24}}} = \frac{\xi_2}{\xi_4}$$

$$(A_4 \infty \mathbf{E}_{34} \mathbf{M}_{34}) = \frac{1}{\dfrac{A_4 \mathbf{M}_{34}}{A_4 \mathbf{E}_{34}}} = \frac{\xi_3}{\xi_4}$$

e se sia:

$$A_4 E_{14} = A_4 E_{24} = A_4 E_{34} = 1$$

sarà

$$A_4 \mathbf{E}_{14} = A_4 \mathbf{E}_{24} = A_4 \mathbf{E}_{34} = -1$$

ed allora le

$$\frac{x_1}{x_4} = x, \quad \frac{x_2}{x_4} = y, \quad \frac{x_3}{x_4} = z$$

sono le *ordinarie coordinate cartesiane oblique* del punto M; e le

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = t\,, \quad \frac{\xi_2}{\xi_4} = u\,, \quad \frac{\xi_1}{\xi_4} = v$$

le ordinarie *coordinate Plucheriane* del piano μ; essendo α_1, α_2, α_3 i *piani coordinati;* il punto

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = A_4 = O$$

si dice l'*origine*; ed

$$\alpha_2\,\alpha_3\,, \quad \alpha_3\,\alpha_1\,, \quad \alpha_1\,\alpha_2$$

sono i tre *assi coordinati.* E se il triedro $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ è *trirettangolo* avremo le ordinarie *coordinate cartesiane rettangolari.*

Le coordinate cartesiane di un punto M sono adunque *le misure delle distanze del punto M ai tre piani coordinati, contate sopra tre direzioni parallele agli assi coordinati;* e quando gli *assi sono rettangolari, le coordinate cartesiane sono senz'altro le misure delle distanze del punto dai tre piani coordinati.*

Od anche:

Le coordinate x, y, z di un punto M sono le proiezioni del segmento finito OM, intercetto fra l'origine O e il punto M, fatte dalle rette all'infinito dei piani coordinati sopra i tre assi coordinati. Le coordinate invece plucheriane di un piano sono le misure, prese con segno contrario, dei segmenti intercetti dall'origine e dal piano sugli assi.

Nelle coordinate cartesiane di un punto, l'unità di misura contata a partire dall'origine sugli assi fissa la *direzione positiva degli assi stessi;* e quindi delle distanze dei punti dai piani coordinati.

È bene notare altresì che se le coordinate x, y, z di M sono rettangolari, esse non sono altro che le proiezioni ortogonali di OM sugli assi

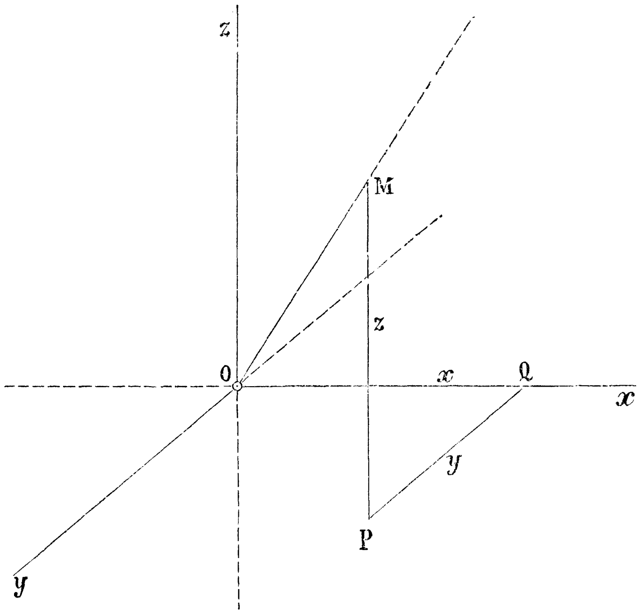

Fig. 1.

coordinati, che indicheremo anche in ogni caso, corrispettivamente con x, y, z; così che saranno yz, zx, xy i piani coordinati (fig. 1).

Osserviamo ancora che quando una o due, o tutte tre le coordinate cartesiane sono infinitamente grandi, il punto da esso determinato è un punto all'infinito; cioè un punto del piano all'infinito. Inoltre le coordinate plucheriane del piano all'infinito sono tutte nulle, quindi possiamo dire che il piano stesso è rappresentato dall'equazione impropria

$$1 = 0$$

o in generale: costante = 0.

Se invece le coordinate plucheriane di un piano tendono a diventare infinite, essendo finiti i loro rapporti, allora l'equazione del piano sarà della forma

$$h\,x + h\,y + z = 0$$

cioè avremo l'equazione di un piano che contiene l'origine.

Che poi una relazione lineare fra le coordinate cartesiane di un punto corrente *rappresenti* un piano, si deduce evidentemente allo stesso modo con cui si è fatto per le coordinate proiettive generali, introducendo le debite ipotesi per gli elementi fondamentali. Però vedremo più avanti una speciale dimostrazione pel caso delle coordinate cartesiane.

§ 2. Spazii proiettivi.
Trasformazione delle coordinate proiettive.

1. Siano X, X' due punti dello spazio le cui coordinate x_r, x'_r siano legate dalle relazioni:

$$\left.\begin{array}{c}(r = 1, 2, 3, 4)\\ \rho\, x_r = a_{r1}\, x'_1 + a_{r2}\, x'_2 + a_{r3}\, x'_3 + a_{r4}\, x'_4\,;\end{array}\right\}\ (1)$$

da cui si ricava reciprocamente

$$\left.\begin{array}{c}(r = 1, 2, 3, 4)\\ \rho' x'_r = A_{1r} x_1 + A_{2r} x_2 + A_{3r} x_3 + A_{4r} x_4 ,\end{array}\right\} (\mathrm{I})'$$

essendo A_{rs} l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

Per le (I) od (I)$'$ è posta una corrispondenza univoca tra due spazii Σ, Σ' tale che quando il punto X di Σ descrive il piano ξ di coordinate ξ_r, il punto X' di Σ' descrive un piano ξ' le cui coordinate ξ'_r sono date dalle formole

$$\left.\begin{array}{c}(r = 1, 2, 3, 4)\\ \mu \xi'_r = a_{1r} \xi_1 + a_{2r} \xi_2 + a_{3r} \xi_3 + a_{4r} \xi_4\end{array}\right\} (\mathrm{II})$$

da cui si ricava reciprocamente

$$\left.\begin{array}{c}(r = 1, 2, 3, 4)\\ \mu' \xi_r = A_{r1} \xi'_1 + A_{r2} \xi'_2 + A_{r3} \xi'_3 + A_{r4} \xi'_4 .\end{array}\right\} (\mathrm{II})'$$

Ora le formole (I) od (I)$'$ oppure le (II) o (II)$'$ rappresentano due spazii Σ e Σ' che, per definizione, si dicono *proiettivi* od in corrispondenza univoca lineare e quindi:

a) *Due spazii proiettivi od* omografici *oppure in corrispondenza omografica o lineare sono due spazii* Σ, Σ' *tali che ad un punto M* *dell'uno corrisponde un punto M' dell'altro in modo che ad un piano μ passante per un punto M dell'un Σ, corrisponde in Σ' un piano μ' passante pel punto M' corrispondente.*

Sia dalle formole che col puro ragionamento segue subito:

Ad una retta g di Σ passante per M corrisponde una retta g' di Σ' passante per M'.

b) Viceversa poi, per un noto teorema di Geometria elementare, segue che: *Se due spazii Σ, Σ' si corrispondono punto per punto, in modo che ad un punto M di Σ corrisponde un punto M' di Σ', sicchè ad una retta passante per M in Σ corrisponde una retta passante per M' in Σ', allora ha luogo la proprietà a);* cioè: *che un piano di Σ passante per M corrisponde un piano di Σ' passante per M'.*

Dalle formole e dalle cose dette dalle forme proiettive di 1ª specie (vedi *Geom. analitica del piano*) risulta subito che:

c) *In due spazii omografici Σ, Σ' ad una forma fondamentale di 1ª specie dell'uno Σ, corrisponde nell'altro Σ' una forma analoga proiettiva alla prima.*

E di qui risulta subito che:

La corrispondenza in due spazii proiettivi Σ, Σ' è determinata essendo dati due pentagoni gobbi corrispondenti; dicendo pentagono gabba la figura composta di cinque punti, quat-

La corrispondenza in due Spazii proiettivi Σ, Σ' è determinata da due pentaedri corrispondenti; dicendo PENTAEDRO *la figura composta di cinque piani che a quattro a quattro non* *tro qualunque dei quali non siano in un piano; delle dieci rette che uniscono i cinque punti a due a due e dei dieci piani che li uniscono a tre a tre.*

Infatti con ciò restano determinate tre coppie di fasci proiettivi di piani che in uno spazio Σ' determinano il corrispondente di un punto dato dell' altro spazio Σ.

passano per lo stesso punto; e delle dieci rette intersezioni e dei punti intersezioni di quei piani rispettivamente presi a due a due e a tre a tre.

Infatti con ciò restano determinate tre coppie di punteggiate proiettive che nell' uno spazio Σ' determinano il piano corrispondente di un piano dato nell'altro Σ.

Se ora fra gli elementi di due spazii Σ, Σ' immaginiamo la corrispondenza che abbia la proprietà a) oppure b) i due spazii saranno necessariamente proiettivi; cioè le coordinate

$$x_2 r \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

di un punto M qualunque dell'un spazio Σ saranno proporzionali a funzioni lineari omogenee del punto corrispondente M' dell'altro spazio Σ'.

Infatti in due spazii posti in corrispondenza dotata della proprietà a) o b) ha luogo la proprietà c). D'altra parte ponendo:

$$\frac{x_1}{x_4} = x \quad \frac{x_2}{x_4} = y \quad \frac{x_3}{x_4} = z,$$

$$\frac{x'_1}{x'_4} = x' \quad \frac{x'_2}{x'_4} = y' \quad \frac{x'_3}{x'_4} = z'$$

e

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = t \quad \frac{\xi_2}{\xi_4} = u \quad \frac{\xi_3}{\xi_4} = v,$$

$$\frac{\xi'_1}{\xi'_4} = t' \quad \frac{\xi'_2}{\xi'_4} = u' \quad \frac{\xi'_3}{\xi'_4} = v'$$

le formole che servono a definire analiticamente una corrispondenza proiettiva, diventano:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}}{a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_4 a_4} \\
y &= \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}}{a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_4 a_4} \\
z &= \frac{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}}{a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}}
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})'$$

$$\left.\begin{aligned}
t' &= \frac{a_{11}t + a_{21}u + a_{31}v + a_{41}}{a_{14}t + a_{24}u + a_{34}v + a_{44}} \\
u' &= \frac{a_{12}t + a_{22}u + a_{32}v + a_{42}}{a_{14}t + a_{24}u + a_{34}v + a_{44}} \\
v' &= \frac{a_{13}t + a_{23}u + a_{33}v + a_{43}}{a_{14}t + a_{24}u + a_{34}v + a_{44}}
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})'$$

e si debbono ridurre a tale forma, qualora si voglia determinare per ogni punto e per ogni piano il suo punto e piano corrispondente; perchè per determinare un punto ed un piano bastano che siano dati i parametri del punto o del piano, cioè i rapporti di tre delle coordinate omogenee alla rimanente. Quando poi lo spazio sia riferito ad un sistema di coordinate cartesiane, le formole (I)′ o (II)′ sono quelle che definiscono l'*omografia* ossia la corrispondenza omografica, essendo x, y, z le coordinate cartesiane di un punto, e t, u, v le plucheriane di un piano.

Ora nelle formole (I)′ o (II)′ abbiamo 15 coefficienti distinti a_{rs}; date quindi i vertici di due pentagoni corrispondenti o le faccie di due pentaedri corrispondenti le formole stesse servono a rappresentare la corrispondenza determinata dai detti elementi corrispondenti e definita dalla proprietà a) o b); il che dimostra quanto si voleva, cioè:

Una corrispondenza lineare, definita, nel modo già detto, da relazioni lineari fra le coordinate dei due punti o di due piani corrispondenti è anche una corrispondenza definita geometricamente dalle proprietà a) o b).

È chiaro altresì che due sistemi piani fra loro corrispondenti in due spazii proiettivi sono proiettivi perchè sono sistemi tali che ad un punto M dell'uno corrisponde un punto M' dell'altro sicchè ad una retta g passante pel punto M dell'un sistema corrisponde una retta g' passante pel punto M' corrispondente nell'altro.

E così *due stelle corrispondenti* sono proiettive perchè godono della proprietà che nasce dal proiettare da un centro due sistemi piani proiettivi, ossia posti in corrispondenza lineare (vedi *Geometria analitica del piano*).

2. Cerchiamo ora se in due spazii proiettivi vi possono essere *elementi uniti* cioè corrispondenti a sè stessi.

Come si è fatto per due sistemi piani projettivi si vede subito che l'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

del 4.° grado in ρ, serve a determinare, per le equazioni coesistenti:

$$(r = 1, 2, 3, 4)$$

$$a_{r_1} x_1 + a_{r_2} x_2 + a_{r_3} x_3 + a_{r_4} x_4 - \rho x_r = 0,$$

i quattro punti uniti dei due spazii projettivi; e sostituendo alla quantità a_{rs}, le A_{rs} si determinano correlativamente i 4 piani uniti. Concludiamo quindi:

In due spazii projettivi havvi in generale un tetraedro di elementi uniti.

3. Consideriamo ora i punti fondamentali

$$(r = 1, 2, 3, 4) \quad A_r, E$$

come appartenenti allo spazio Σ'; e siano

$$A_r^{(0)}, E^{(0)} (r = 1, 2, 3, 4)$$

i loro punti rispettivamente corrispondenti in Σ; questi ultimi avranno rispettivamente per coordinate:

$$a_{r_1},\ a_{r_2},\ a_{r_3},\ a_{r_4};\ (r = 1, 2, 3, 4)$$
$$\Sigma a_{1s},\ \Sigma a_{2s},\ \Sigma a_{3s},\ \Sigma a_{4s} (s = 1, 2, 3, 4),$$

il simbolo Σ indicando l'operazione della somma.

Saranno quindi projettive le coppie di fasci di piani:

$$A_2 A_3 (A_1 A_4 E X'),\ A_2^{(0)} A_3^{(0)} (A_1^{(0)} A_4^{(0)} E^{(0)} X)$$

$$A_3 A_1 (A_2 A_4 E X'),\ A_3^{(0)} A_1^{(0)} (A_2^{(0)} A_4^{(0)} E^{(0)} X)$$

$$A_1 A_2 (A_3 A_4 E X'),\ A_1^{(0)} A_2^{(0)} (A_3^{(0)} A_4^{(0)} E^{(0)} X);$$

e segue da ciò che le coordinate x'_r del punto X' di Σ' non sono altro che le coordinate del punto X quando però si assuma per elementi fondamentali i punti $A_r^{(0)}$, $E^{(0)}$; essendo $E^{(0)}$ il punto unità.

In altri termini adunque le formole (I), (I)'; (II), (II)' sono anche quelle che servono a passare da un sistema ad un altro di elementi fondamentali.

4. Di qui le seguenti importanti conseguenze fra loro correlative nello spazio:

Un'equazione	*Un' equazione*
$f(x) = 0$	$F(\xi) = 0$
algebrica razionale intera omogenea del grado n nelle coordinate x_r di un punto viene trasformata in una equazione analoga e dello stesso grado nelle nuove coordinate del punto, quando si trasformano in qualunque modo le coordinate.	*algebrica razionale intera omogenea del grado n nelle coordinate ξ_r di un piano si trasforma in un' equazione analoga e dello stesso grado nelle nuove coordinate ξ'_r del piano, quando si cangia in qualunque modo il sistema delle coordinate.*

Quindi:

Come la retta fondamentale

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

così ogni altra retta dello spazio sega la superficie $S_2^{(n)}$ rappresentata dalle $f(x) = 0$ in n punti al più; e se la sega $n+1$ punti la retta appartiene alla superficie.

Il numero n grado dell'equazione $f(x) = 0$ dicesi l'*ordine della superficie* rappresentata.

Se dunque siano

$$f(x) = 0 \quad \varphi(x) = 0$$

l'equazioni di due superficie S_2^n, S_2^m degli ordini n, m la linea $C_1^{(m\,n)}$ loro intersezione sarà incontrata dal piano fondamentale $x_r = 0$, epperò da qualunque piano dello spazio in $m\,n$ punti al più; e si dirà perciò che la curva $C^{(m\,n)}$ è dell'*ordine* $m\,n$.

Quindi:

Come dalla retta fondamentale

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0$$

così da ogni altra retta dello spazio partono al più n piani dell'Inviluppo $\Sigma_2^{(n)}$ rappresentato dalla $F(\xi) = 0$; e se ne partono $n+1$, la retta considerata come asse di un fascio di piani, fa parte dell'inviluppo stesso $\Sigma_2^{(n)}$.

Il numero n dicesi la *classe dell'inviluppo.*

Se dunque siano

$$F(\xi) = 0 \quad \Phi(\xi) = 0$$

l'equazioni di due inviluppi Σ_2^n, Σ_2^m delle classi n, m rispettivamente, i piani comuni formeranno un sviluppabile $\Sigma_1^{(m\,n)}$ che si dice della *classe* mn, perchè come per un punto fondamentale $\xi_r = 0$, così per qualunque punto passano in generale al più $m\,n$ piani di $\Sigma_1^{(n\,m)}$.

Ed anche:

In due spazii proiettivi Σ, Σ' ad una superficie algebrica dell'ordine m e ad una curva algebrica dell'ordine K dell'uno spazio Σ corrisponde nell'altro spazio Σ' una superficie ed una curva dello stesso ordine.

Ed anche:

In due spazii proiettivi Σ, Σ' ad una superficie inviluppo algebrica della classe n, e ad una sviluppabile algebrica della classe K dell'uno spazio Σ corrisponde nell'altro una superficie inviluppo od una sviluppabile della stessa classe.

§ 3. **Spazii reciproci.**

1. Supponiamo ora che un punto X e un piano ξ' variano corrispondentemente a descrivere due spazii Σ, Σ_1 essendo le loro coordinate legate dalle relazioni

$$\left.\begin{matrix}(r = 1, 2, 3, 4) \\ \rho\, x_r = a_{r_1} \xi'_1 + a_{r_2} \xi'_2 + a_{r_3} \xi'_3 + a_{r_4} \xi'_4 ,\end{matrix}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

da cui si ricava reciprocamente:

$$\left.\begin{matrix}(r = 1, 2, 3, 4) \\ \rho'\, \xi'_r = A_{1r}\, x_1 + A_{2r}\, x_2 + A_{3r}\, x_3 + A_{4r}\, x_4 .\end{matrix}\right\} \quad (\mathrm{I})'$$

Allora se il punto X descrive il piano ξ di coordinate ξ_r; il piano corrispondente ξ' ruota intorno ad un punto X' di coordinate x'_r date dalle formole:

$$(r = 1, 2, 3, 4) \qquad \mu x'_r = a_{1r}\xi_1 + a_{2r}\xi_2 + a_{3r}\xi_3 + a_{4r}\xi_4 \qquad \text{(II)}$$

da cui si ricava reciprocamente

$$(r = 1, 2, 3, 4) \qquad \mu'\xi_r = A_{r1}x'_1 + A_{r2}x'_2 + A_{r3}x'_3 + A_{r4}x'_4. \qquad \text{(II)}'$$

I due spazii Σ, Σ_1 si diranno posti in corrispondenza lineare reciproca o brevemente si diranno spazii fra loro *reciproci*.

La corrispondenza fra Σ e Σ_1 è dotata della proprietà:

a) *Ad un punto M dell'uno spazio Σ corrisponde un piano μ_1 dell'altro Σ_1 in modo che ad un piano di Σ passante M corrisponde un punto in Σ_1 situato sopra μ_1.*

Segue da ciò immediatamente, col puro ragionamento, o dalle formole:

b) *Ai punti di una retta g dell'uno spazio Σ corrispondono piani passanti per una stessa retta g_1 dell'altro spazio Σ_1.*

Ossia:

Ad una retta g come luogo dei suoi punti è reciproca una retta g_1 generata come inviluppo dei piani che passano per la retta stessa.

2. Del resto anche qui come la proprietà *a*) ha per conseguenza la *b*) così viceversa: se in una corrispondenza fra due spazii Σ, Σ_1 ha luogo la proprietà *b*) cioè: *se ad un punto M di Σ corrisponde un piano μ_1 di Σ_1 sicchè ad una retta g di Σ passante per M corrisponde una retta g_1*

di Σ_1 situata in μ_1, allora anche ai punti M di un piano μ di Σ corrisponderanno piani μ_1 di Σ_1 passanti per un punto M_1.

Infatti alla retta g del piano μ di Σ corrisponderanno rette g_1 in Σ_1 che sono a due a due nello stesso piano senza essere tutte nello stesso piano; dunque le rette stesse e quindi i piani μ_1 corrispondenti ai punti M di μ passeranno tutti per uno stesso punto M_1.

Importa ora ritenere che sia dalle formole, sia dalla definizione geometrica di forma armonica, risulta:

Ad una forma fondamentale di 1ª specie in Σ corrisponde in Σ_1 una forma fondamentale di 1ª specie proiettiva alla prima.

3. Di qui seguono importanti conseguenze. Sia intanto $ABCDE$ un *pentagono gobbo* di Σ, cioè la figura determinata da cinque punti, quattro qualunque dei quali non siano in un piano; e sia dato in Σ_1 un *pentaedro* $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$ cioè la figura corrispondente del pentagono, la quale è dunque quella determinata da cinque piani, quattro qualunque dei quali non passano per uno stesso punto.

Se indichiamo con M un punto di Σ e con μ_1 il suo piano corrispondente in Σ_1, saranno proiettive le coppie di forme fondamentali

$$AB(CDEM), \quad \alpha_1\,\beta_1\,(\gamma_1\,\delta_1\,\varepsilon_1\,\mu_1)$$
$$BC(ADEM), \quad \beta_1\,\gamma_1\,(\alpha_1\,\delta_1\,\varepsilon_1\,\mu_1)$$
$$CA(BDEM), \quad \gamma_1\,\alpha_1\,(\beta_1\,\delta_1\,\varepsilon_1\,\mu_1)$$

e queste forme projettive ci dicono che se *due* *spazii Σ, Σ_1 sono posti in corrispondenza dotata della proprietà a), o b), la corrispondenza stessa è determinata quando sia dato un pentagono dell'uno spazio Σ ed il suo pentaedro corrispondente nell'altro spazio Σ_1*; perchè allora si può costruire di ogni punto M dell' uno spazio Σ il suo piano μ_1 corrispondente in Σ_1.

Ora le formole (I) che servono a dare la corrispondenza fra Σ, Σ_1 ci dicono che date le coordinate dei vertici di un pentagono di Σ e date le coordinate dei piani del corrispondente pentaedro in Σ_1 sono determinati in modo unico i quindici coefficienti distinti contenuti nelle formole stesse, cosicchè esse rappresenteranno allora la corrispondenza reciproca in cui il dato pentagono di Σ ha per corrispondente il pentaedro dato in Σ_1.

Dunque:

Ogni corrispondenza fra gli elementi di due spazii Σ, Σ_1 definita della proprietà a) o b), è una corrispondenza rappresentata dalle formole (I); ossia è *una corrispondenza reciproca-lineare in quanto che le coordinate omogenee di un punto sono proporzionali a funzioni lineari omogenee delle coordinate del piano corrispondente.*

§ 4. Spazii polari reciproci.

1. È subito visto che se un punto X di Σ giace nel suo piano corrispondente in Σ_1, lo stesso punto X considerato come punto di Σ_1

giace nel suo piano corrispondente in Σ; onde l'equazione:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 + A_{44} x_4^2 + \\ + (A_{23} + A_{32}) x_2 x_3 + (A_{31} + A_{13}) x_3 x_1 + \\ + (A_{12} + A_{21}) x_1 x_2 + (A_{14} + A_{41}) x_1 x_4 + \\ + (A_{24} + A_{42}) x_2 x_4 + (A_{34} + A_{43}) x_3 x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

rappresenta il luogo dei punti dello spazio per cui passano rispettivamente i loro piani corrispondenti nei due spazii reciproci Σ, Σ_1 e correlativamente l'equazione:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2 + a_{33} \xi_3^2 + a_{44} \xi_4^2 + \\ + (a_{23} + a_{32}) \xi_2 \xi_3 + (a_{31} + a_{13}) \xi_3 \xi_1 + \\ + (a_{12} + a_{21}) \xi_1 \xi_2 + (a_{14} + a_{41}) \xi_1 \xi_4 + \\ + (a_{24} + a_{42}) \xi_2 \xi_4 + (a_{34} + a_{43}) \xi_3 \xi_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

rappresenta il luogo dei piani su cui giacciono rispettivamente i loro punti corrispondenti, dunque:

In due spazii reciproci Σ, Σ_1 *il luogo dei punti per cui passano i loro piani corrispondenti è una superficie algebrica* $\Sigma^{(2)}$ *del 2.° ordine; e i piani che contengono i loro punti corrispondenti formano un inviluppo algebrico* $\Sigma_1^{(2)}$ *della 2.ª classe.*

2. Supponiamo ora che il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

delle a_{rs} sia *simmetrico* ossia si abbia $a_{rs} = a_{sr}$; allora le (I) e (II) § 3, n.° 1 ci dicono subito che ad un punto X sia considerato come punto di Σ che di Σ_1 corrisponde sempre il medesimo piano ξ'; cioè i due spazii reciproci Σ, Σ_1 sono in *corrispondenza involutoria* od *in involuzione*, ossia si dicono formare un SISTEMA POLARE DI SPAZIO.

In tale caso le equazioni (I) e (II) del n.° 2 diventano

$$\left.\begin{array}{c} f = A_{11} x_1 + A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 + \\ + A_{44} x_4^2 + 2 A_{23} x_2 x_3 + 2 A_{31} x_3 x_1 + \\ + 2 A_{12} x_1 x_2 + 2 A_{14} x_1 x_4 + 2 A_{24} x_2 x_4 + \\ + 2 A_{34} x_3 x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{array}{c} F = a_{11} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2 + a_{33} \xi_3^2 + \\ + a_{44} \xi_4^2 + 2 a_{23} \xi_2 \xi_3 + 2 a_{31} \xi_3 \xi_1 + \\ + 2 a_{12} \xi_1 \xi_2 + 2 a_{14} \xi_1 \xi_4 + 2 a_{24} \xi_2 \xi_4 + \\ + 2 a_{34} \xi_3 \xi_4 = 0. \end{array}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

3. Analogamente a quanto si è operato per le curve piane del 2.° ordine (vedi *Geometria analitica del piano*), se noi cerchiamo *i centri armonici di 1.° grado rispetto ad un polo X delle coppie di punti in cui le rette passanti per X segano la superficie* $\Sigma^{(2)}$ *data dalla* (I); *o in altri termini, se noi cerchiamo i coniugati armonici di X rispetto alle coppie di punti in cui le trasversali condotte per X segano* $\Sigma^{(2)}$ troviamo che tali punti giaciono precisamente nel piano corrispondente del punto X, e ciò per le (II)' del numero 1 § 3.

Il piano corrispondente del punto X si dice quindi il piano *polare* del punto X rispetto alla superficie di 2.° ordine $\Sigma^{(2)}$, luogo dei punti i cui piani polari passano per i punti stessi. La superficie $\Sigma^{(2)}$ dicesi poi la DIRETTRICE del sistema polare formato dai due sistemi reciproci in involuzione.

Come dal piano $x_4 = 0$ così da qualunque piano $\Sigma^{(2)}$ è tagliata secondo una conica; così il piano polare di un punto X è il piano che contiene le rette polari di quel punto rispetto a tutte le coniche in cui i piani della stella X segano $\Sigma^{(2)}$. In particolare quindi il piano polare di X conterrà i punti di contatto delle tangenti condotte da X a quelle coniche; e le tangenti nominate sono quindi anco tangenti a $\Sigma^{(2)}$.

Se il punto X è un punto di $\Sigma^{(2)}$, allora il piano polare di X passa per X e contiene le tangenti in X a $\Sigma^{(2)}$; e dicesi perciò il *piano tangente* in X a $\Sigma^{(2)}$.

4. Se noi ora vogliamo scrivere la relazione a cui debbono soddisfare le coordinate dei piani tangenti a $\Sigma^{(2)}$, analogamente a quanto si è operato in *Geometria analitica del piano per le coniche*, troveremo che tal relazione è

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 0 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \xi_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \xi_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \xi_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & \xi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia, indicando con A'_{rs} l'elemento reciproco di A_{rs} nel determinante delle A_{rs}, essendo

$$A'_{rs} = a\, a_{rs}\,,$$

ove a è il determinante formato colle a_{rs}, la relazione ultima non è altro che:

$$a\, F = 0$$

cioè la (II) moltiplicata per a.

I piani tangenti a $\Sigma^{(2)}$ sono appunto i piani dello spazio i cui punti corrispondenti giaciono nei piani stessi; e i punti di $\Sigma_{(2)}$ sono i *punti di contatto* dei rispettivi piani tangenti.

Le equazioni (I) e (II) determinano adunque una stessa superficie $\Sigma^{(2)}$: e propriamente la (I) la determina come complesso di punti ossia come LUOGO e si dice appunto che la (I) è l'*equazione locale* di $\Sigma^{(2)}$; la (II) invece determina $\Sigma^{(2)}$ come *inviluppata* dai suoi piani tangenti, ossia come INVILUPPO e si dice perciò che la (II) è l'*equazione tangenziale* di $\Sigma^{(2)}$.

§ 5. Sistema nullo.

1. Resta ancora da considerarsi il caso degli spazii reciproci in involuzione nei quali ad ogni punto corrisponde un piano passante pel punto stesso, ossia il caso in cui i due sistemi reciproci formano un sistema polare che col signor Reye, dicesi un SISTEMA NULLO.

Intanto risulta che se si ha una corrispondenza reciproca fra due spazii Σ, Σ_1 tale che il punto

M di Σ giaccia nel suo piano corrispondente μ_1 in Σ_1, allora essa corrispondenza è *involutoria*. Infatti ogni retta passante per M e situata in μ_1 ha per corrispondente in Σ_1 la retta stessa, che dicesi un *raggio direttore del sistema nullo*.

Segue da ciò che necessariamente al punto M considerato come punto di Σ_1 dovrà corrispondere ancora il piano μ. Dunque la corrispondenza reciproca è involutoria, cioè Σ e Σ_1 formano un sistema polare, che noi diciamo sistema nullo.

Segue ancora, dal carattere speciale della corrispondenza, che ad una retta g corrisponde un altra retta g_1, o coincidente colla g, o che non taglia la g. Infatti se due rette corrispondenti g, g_1 si tagliassero il loro piano $g\,g_1$, avrebbe per punto corrispondente il punto comune alle due rette, quindi a ciascuna di esse dovrebbe corrispondere sè stessa contro il supposto, cioè le due rette debbono necessariamente coincidere in una sola.

2. Dunque dato un sistema nullo fra le rette dello spazio ne abbiamo una serie infinita speciale, quella costituita dai raggi direttori del sistema stesso; ossia dalle rette polari di sè stesse. Questa serie speciale si dice un *complesso di primo grado* perchè le rette della serie che passano per un punto o che sono situate in un piano vi formano un fascio.

Ogni altra retta a che non sia un raggio direttore ha per polare una retta a_1 che non taglia la a. Ora le rette che si appoggiano a due rette polari a, a_1 sono evidentemente raggi direttori e se indichiamo con b una retta che non sia un raggio direttore e che non si appoggi ad a, a_1, le rette che si appoggiano alle a, a_1, b sono raggi direttori del sistema che si appoggiano anche alla polare b_1 di b e formano una superficie $\Sigma^{(2)}$ di 2.° ordine (vedi pag. 38) perchè è subito visto *essere il luogo delle intersezioni dei piani corrispondenti in due fasci proiettivi di piani aventi per assi due qualunque delle quattro rette* a, a_1, b, b_1.

3. In generale è chiaro che tre rette d_1, d_2, d_3 che a due a due non si tagliano determinano una superficie di 2.° ordine, luogo delle rette g che si appoggiano alle tre rette date che diconsi *direttrici* mentre le rette g diconsi *generatrici*. Inoltre per il teorema dato a pag. 33 del *Manuale Geometria analitica del piano* risulta subito che una retta che si appoggia a tre generatrici si appoggia a tutte le altre, cosicchè diventa una direttrice. In altri termini la superficie ammette infinite direttrici; ossia per ciascun punto di essa passa una *generatrice* e *una direttrice*; e g è anche il luogo delle direttrici, cioè delle rette che si appoggiano a tre generatrici. Gli è perciò che la superficie si dice anche avere due sistemi di *generatrici rettilinee: due generatrici di uno stesso sistema non si tagliano; e si tagliano sempre in un punto delle superficie due generatrici di sistema differente.*

Possiamo poi dire:

In una superficie $\Sigma^{(2)}$ *di 2.° ordine proiettando da due direttrici fisse una generatrice variabile di essa si ottengono due fasci proiettivi di piani.*

Egualmente si vede subito:

Tagliando con due direttrici fisse una generatrice variabile si ottengono due punteggiate proiettive.

Cosicchè la superficie $\Sigma^{(2)}$ può anche definirsi colla definizione correlativa alla prima cioè: *luogo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti di due punteggiate proiettive non poste nello stesso piano.*

La sezione di $\Sigma^{(2)}$ è in generale una *conica*; e in caso particolare il sistema di due rette, ed allora il piano è *tangente* alla superficie nel punto d'incontro delle due rette perchè contiene le tangenti in quel punto alle coniche contenute nella superficie stessa.

4. La superficie $\Sigma^{(2)}$ ammetterà adunque (vedi pag. 60) il relativo sistema polare; e dicendo rapporto anarmonico di quattro generatrici dell'un sistema il rapporto anarmonico costante di quattro piani in cui da una direttrice qualunque si proiettano le quattro generatrici, la geometria proiettiva di un sistema di generatrici della superficie $\Sigma^{(2)}$ è identica a quella di una conica sostituendo all'elemento punto della conica l'elemento retta (generatrice) di $\Sigma^{(2)}$.

Così potremo riferire proiettivamente due sistemi di generatrici di due superficie $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma_1^{(2)}$ ed è chiaro che:

In due spazii reciproci Σ, Σ_1 ad un sistema di generatrici di una superficie $\Sigma^{(2)}$ di 2.° ordine corrisponde nell'altro spazio un sistema di generatrici di un'altra superficie analoga; e i due sistemi sono riferiti fra loro proiettivamente.

5. Ciò posto, sia $\Sigma^{(2)}$ una superficie di 2.° ordine formata da raggi direttori del sistema nullo, avuto riguardo a ciò che precede possiamo dire:

Due coppie a, a_1, b, b_1 di rette polari reciproche in un sistema nullo sono direttrici di una superficie $\Sigma^{(2)}$ di 2.° ordine di cui il sistema delle generatrici è formata di tutti raggi direttori del sistema nullo e il sistema delle direttrici è formato da coppie di rette polari reciproche che per conseguenza sono coppie di rette coniugate di una stessa involuzione, che se è positiva i suoi elementi doppii sono due raggi direttori.

Ogni retta che sega due direttrici di $\Sigma^{(2)}$ polari reciproche nel sistema nullo è un raggio direttore di esso; ne segue evidentemente che quando sia data la quadrica $\Sigma^{(2)}$ e la involuzione delle sue direttrici resta determinato il sistema nullo; perchè per un punto arbitrario M dello spazio resta determinato il piano che contiene due, epperò anche infinite rette che tagliano le coppie di raggi coniugati dell'involuzione; e viceversa dato il piano resta determinato il punto perchè il piano sega la superficie $\Sigma^{(2)}$ in una conica nella quale si ha un'involuzione di punti; onde le rette che congiungono le coppie di elementi coniugati passano necessariamente per lo stesso punto M (vedi Manuale *Geometria analitica del piano*).

Inoltre risulta subito che se un punto descrive una retta il piano corrispondente passa per un altra retta, dunque la corrispondenza è necessariamente lineare reciproca ed involutoria.

6. Ciò posto vogliamo ora trovare le formole che servono a rappresentare un sistema nullo. Perciò osserviamo che il piano corrispondente da un punto X non è altro che il luogo dei *raggi direttori* (v. pag. 62) passanti per X, così se Z è un punto qualunque del piano in discorso dovendo esso contenere la retta XZ la sua equazione sarà della forma

$$\alpha_{11}(x_2 z_3) + \alpha_{22}(x_3 z_1) + \alpha_{32}(x_1 z_2) +$$
$$+ \alpha_{23}(x_1 z_4) + \alpha_{31}(x_2 z_4) + \alpha_{12}(x_3 z_4) = 0$$

essendo al solito, in generale:

$$(x_r z_s) = x_r z_s - x_s z_r.$$

Le coordinate quindi del piano ξ' corrispondente ad un punto X sono date in tal caso dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\xi'_1 &= \alpha_{33}\,x_2 - \alpha_{22}\,x_3 + \alpha_{23}\,x_4 \\ \rho\,\xi'_2 &= \alpha_{11}\,x_3 - \alpha_{33}\,x_1 + \alpha_{31}\,x_4 \\ \rho\,\xi'_3 &= \alpha_{22}\,x_1 - \alpha_{11}\,x_2 + \alpha_{12}\,x_4 \\ -\rho\,\xi'_4 &= \alpha_{23}\,x_1 + \alpha_{31}\,x_2 + \alpha_{12}\,x_3 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

da cui si ricava reciprocamente:

$$\left.\begin{aligned} \rho'\,x_1 &= \alpha_{12}\,\xi'_2 - \alpha_{31}\,\xi'_3 + \alpha_{11}\,\xi'_4 \\ \rho'\,x_2 &= \alpha_{23}\,\xi'_3 - \alpha_{12}\,\xi'_2 + \alpha_{33}\,\xi'_4 \\ \rho'\,x_3 &= \alpha_{31}\,\xi'_1 - \alpha_{23}\,\xi'_1 + \alpha_{22}\,\xi'_4 \\ -\rho'\,x_4 &= \alpha_{11}\,\xi'_1 + \alpha_{22}\,\xi'_2 + \alpha_{33}\,\xi'_3 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}'$$

Le formole (I) od (I)′ servono a rappresentare tutti i possibili sistemi Nulli; poichè un sistema nullo è determinato quando siano dati cinque dei suoi raggi direttori. Infatti tre dei cinque raggi appartengono ad uno stesso sistema $r^{(2)}$ di generatrici di una superficie di 2.ª ordine $S^{(2)}$; e le altre due rette determinano sul sistema $d^{(2)}$ delle direttrici di $r^{(2)}$ due involuzioni di raggi, come aventi per rette doppie quelle rette di $d^{(2)}$ che passano per le coppie di punti ove le due rette nominate segano $S^{(2)}$. Le due involuzioni ne determinano una terza, avente per rette doppie la coppia di raggi conjugati, comune alle due involuzioni. Quest'ultima involuzione determina, come abbiamo detto più sopra, il sistema nullo.

Essendo p_{rs} le coordinate locali, e π_{rs} le coordinate tangenziali di un raggio del sistema nullo dato dalle (I) od (I)′, l'equazione:

$$\alpha_{11}\, p_{23} + \alpha_{22}\, p_{31} + \alpha_{33}\, p_{12} +$$
$$\alpha_{23}\, p_{14} + \alpha_{31}\, p_{24} + \alpha_{12}\, p_{34} = 0$$

o la

$$\alpha_{11}\, \pi_{14} + \alpha_{22}\, \pi_{24} + \alpha_{33}\, \pi_{34} +$$
$$\alpha_{23}\, \pi_{23} + \alpha_{31}\, \pi_{31} + \alpha_{12}\, \pi_{12} = 0$$

dà l'insieme Θ dei raggi direttori del sistema stesso, come raggi le cui coordinate locali o tangenziali soddisfanno all'equazione stessa.

La serie Θ dei raggi direttori l'abbiamo chiamata un *Complesso lineare* di rette: e quindi le equazioni ultime sono dunque quelle che rappresentano un *Complesso lineare*.

7. Come nella Geometria del piano e della stella così anche nella Geometria dello spazio ordinario possiamo dire (v. *Geometria analitica del piano* pag. 275):

Una sostituzione lineare di variabili fatta nelle coordinate degli elementi di una forma serve a passare da una forma ad un'altra proiettiva alla prima; oppure una tal sostituzione serve ad ottenere la stessa forma riferendone però gli elementi a nuovi elementi fondamentali; oppure serve a passare da una forma ad un'altra trasformata della prima col principio di dualità nello spazio.

§ 6. Formole fondamentali per le coordinate cartesiane rettangole.

1. Siano x, y, z le coordinate cartesiane rettangolari di un punto M (fig. 2). Indicando con r la grandezza del segmento OM, non che la direzione del segmento stesso, avremo subito:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(r\,x) \\ y &= r\cos(r\,y) \\ z &= r\cos(r\,z). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ma essendo OM una diagonale del paralellepipedo rettangolo di cui i tre spigoli uscenti da M sono le coordinate del punto M, risulta

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (2)$$

onde dalle (1) avuto riguardo alla (2) si ricava:

$$\cos^2(r\,x) + \cos^2(r\,y) + \cos^2(r\,z) = 1.$$

Indicando, in altri termini, con α, β, γ le inclinazioni cogli assi di una direzione OM uscente dall'origine si ha

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{3}$$

e tal relazione è quella adunque che lega i co-

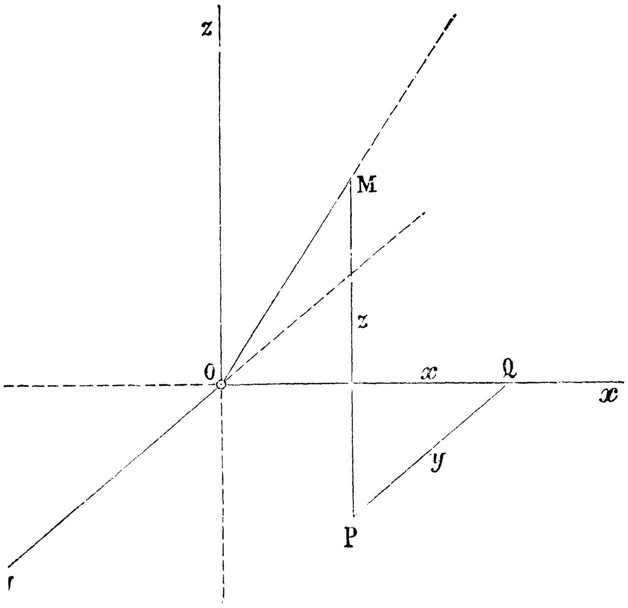

Fig. 2.

seni degli angoli di una direzione qualunque dello spazio.

2. Per un'altra retta $OM' = r'$ uscente dall'origine (fig. 3), avremo

$$x' = r' \cos(r' x)$$
$$y' = r' \cos(r' y)$$
$$z' = r' \cos(r' z)$$

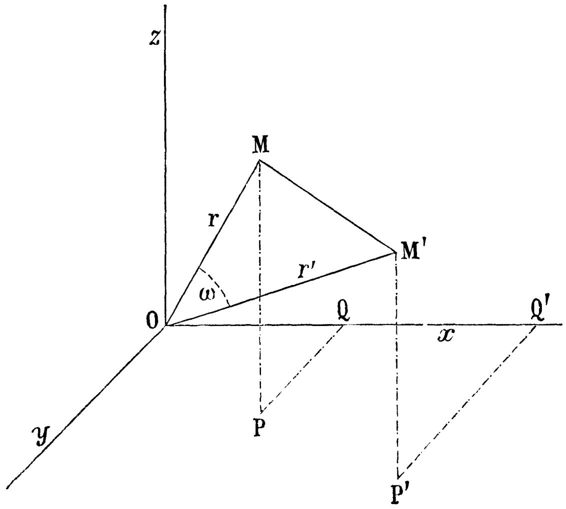

Fig. 3.

quindi

$$x x' + y y' + z z' = r r' \{\cos(r x) \cos(r' x) +$$
$$+ \cos(r y) \cos(r' y) + \cos(r z) \cos(r' z).$$

Ora dal triangolo $O M M'$ si ha

$$\overline{O M M'}^2 = \overline{O M}^2 + \overline{O M'}^2 - 2\, O M \,.\, O M' \cos \omega,$$

indicando con ω l'angolo $M O M'$.

D'altra parte se siano λ, μ, ν le inclinazioni di MM' cogli assi, avremo

$$\left.\begin{aligned} x'-x &= MM'\cos\lambda \\ y'-y &= MM'\cos\mu \\ z'-z &= MM'\cos\nu \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

onde

$$\overline{MM'}^2 = d^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2. \quad (5)$$

Risulta quindi

$$\cos\omega = \frac{r^2+r'^2-d^2}{2\,r\,r'} \qquad (6)$$

onde

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \\ + \cos\gamma\cos\gamma', \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ove per brevità abbiamo indicati con α, β, γ ed α', β', γ' rispettivamente gli angoli delle direzioni r, r' cogli assi.

Le formole (5), (7) servono rispettivamente a dare la distanza di due punti M, M' mediante le loro coordinate, e l'angolo di due rette mediante le loro inclinazioni cogli assi.

Dalla (7) si ricava

$$\begin{gathered} 1-\cos^2\omega = \operatorname{sen}^2\omega = \\ =(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma') - \\ -(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')^2; \end{gathered}$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\omega = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma'\cos\beta)^2 + \\ + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2 + \\ + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Quindi due rette saranno perpendicolari se fra i coseni di due loro direzioni sussista la relazione:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0; \quad (9)$$

e saranno invece parallele se sussistano le relazioni

$$\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta' = 0$$
$$\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma' = 0$$
$$\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta = 0$$

ossia le

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}. \quad (9)$$

3. Siano

$$L x + M y + N z + P = 0$$
$$L' x + M' y + N' z + P' = 0$$

le equazioni di due piani che determinano come loro intersezione una retta. Se indichiamo con a, b, c le coordinate di un punto fisso sulla retta, avremo

$$L a + M b + N c + P = 0$$
$$L' a + M' b + N' c + P' = 0$$

e quindi

$$L(x-a)+M(y-b)+N(z-c)=0$$
$$L'(x-a)+M'(y-b)+N'(z-c)=0$$

onde

$$\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C} \tag{10}$$

ove si è posto

$$A=MN'-M'N$$
$$B=NL'-LN'$$
$$C=LM'-L'M.$$

Le equazioni (10), una qualunque delle quali è conseguenza delle altre due, sono quelle dei piani projettanti la retta sui piani coordinati.

4. Ora se indichiamo con ρ la distanza dal punto di coordinate a, b, c al punto M corrente di coordinate x, y, z; e con λ, μ, ν le inclinazioni di tale direzione cogli assi, avremo

$$x-a=\rho\cos\lambda$$
$$x-b=\rho\cos\mu$$
$$x-c=\rho\cos\nu$$

quindi

$$\frac{A}{\cos\lambda}=\frac{B}{\cos\mu}=\frac{C}{\cos\nu}=K \tag{11}$$

cioè le costanti A, B, C sono proporzionali ai coseni degli angoli che una direzione della retta data fa cogli assi; e quando sia

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

allora le quantità A, B, C sono i coseni stessi.

Dalle (11) si ha

$$A^2 + B^2 + C^2 = K^2;$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \cos\mu &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \cos\nu &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

sono i coseni della direzione considerata espressi per i coefficienti A, B, C delle equazioni (10) della retta. Prendendo il radicale col segno — si hanno i coseni della direzione opposta.

5. Consideriamo ora un'altra retta le cui equazioni siano

$$\frac{x-a'}{A'} = \frac{y-b'}{B'} = \frac{z-c'}{C'}.$$

Le formole (7), (8), per le (12) ed analoghe, diventeranno:

$$\cos\omega = \frac{A\,A' + B\,B' + C\,C'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen}\omega =\\ &= \frac{\sqrt{(B\,C'-B'\,C)^2+(C\,A'-C'\,A)^2+(A\,B'-A'\,B)^2}}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}};\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

le quali formole servono ad esprimere il seno ed il coseno dell'angolo di due rette in funzione delle quantità proporzionali ai coseni degli angoli di due direzioni di esse cogli assi; quindi le relazioni:

$$A\,A' + B\,B' + C\,C' = 0 \tag{15}$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \tag{16}$$

esprimono rispettivamente le condizioni perchè le due rette siano perpendicolari o parallele.

6. Sia

$$L\,x + M\,y + N\,z + P = 0$$

l'equazione di un piano ω qualunque; e siano

$$L_1\,x + M_1\,y + N_1\,z + P = 0$$

$$L_2\,x + M_2\,y + N_2\,z + P = 0$$

le equazioni di altri due piani λ, μ che segano il primo in un punto al finito sicchè il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}$$

sia differente da zero. Allora l'equazione

$$(L_1 + \rho\,L_2)\,x + (M_1 + \rho\,M_2)\,y + (N_1 + \rho\,N_2)\,z + \\ + P_1 + \rho\,P_2 = 0$$

rappresenterà per ogni valore di λ un piano del fascio determinato dai piani λ, μ; e il fascio stesso sarà tagliato dal piano ω in un fascio O di raggi. La retta r rappresentata dalle (10) sarà normale a due raggi $\omega\lambda$, $\omega\mu$ se sia:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ L & M & N \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0,$$

epperò sarà normale a tutti i raggi del fascio O; cioè normale al piano ω. Di qui si ricava subito che:

$$\frac{A}{L\Delta} = \frac{B}{M\Delta} = \frac{C}{N\Delta}$$

cioè i coefficienti A, B, C di una *normale al piano* ω *sono proporzionali ai coefficienti delle* x, y, z *nell'equazione del piano*. Dicendo adunque λ, μ, ν gli angoli cogli assi di una direzione della normale al piano, si avrà:

$$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

$$\cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Le equazioni

$$\frac{x}{L} = \frac{y}{M} = \frac{z}{N} = \rho$$

saranno quelle della normale condotta dall'origine O al piano; e le formole

$$x_1 = \frac{-LP}{L^2+M^2+N^2}$$

$$y_1 = \frac{-MP}{L^2+M^2+N^2}$$

$$z_1 = \frac{-NP}{L^2+M^2+N^2}$$

servono a dare le coordinate x, y, z del piede della normale condotta dall'origine al piano ω; indicando con p la lunghezza di tale normale si avrà

$$p^2 = \frac{P^2}{L^2+M^2+N^2}$$

e

$$p = \pm \frac{P}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

D'altra parte (fig. 4) se indichiamo con P il piede della normale condotta da O al piano ω; e con M un punto qualunque del piano di coordinate x, y, z; allora la retta OP è un lato del poligono gobbo chiuso formato dalle

$$OK = x, \quad KH = y, \quad HM = z$$

ed MP. Projettando sopra OP avremo

$$p = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu.$$

Cioè ponendo:

$$\frac{L}{\cos\lambda} = \frac{M}{\cos\mu} = \frac{N}{\cos\nu} = \frac{-P}{p};$$

essendo $\qquad K = \pm\sqrt{L^2+M^2+N^2},$

l'equazione del piano ω si porrà sotto la forma:

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu - p = 0,$$

che si dice la forma conica dell'equazione del piano in coordinate cartesiane rettangole.

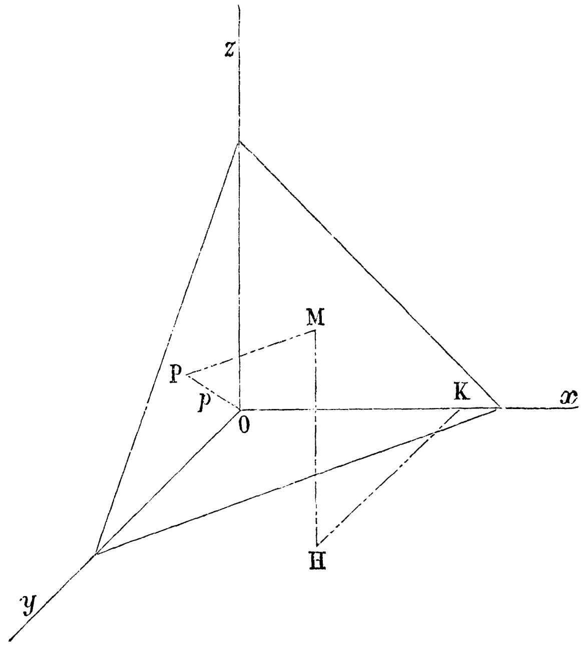

Fig. 4.

Dunque se nelle formole (13) e (14) sostituiamo in luogo di A, B, C, A', B', C', i coefficienti L, M, N dell'equazione del piano ω e quelli L',

M', N' dell'equazione

$$L' x + M' y + N' z + P' = 0$$

di un altro piano ω', le formole stesse serviranno a dare la misura di un angolo diedro dei due piani.

I piani ω, ed ω' saranno poi paralleli se

$$\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} \tag{15}$$

e saranno perpendicolari se

$$L L' + M M' + N N' = 0. \tag{16}$$

§ 7. **Distanza fra un punto ed un piano. Minima distanza di due rette.**

1. Vogliamo ora calcolare la distanza da un punto dato P di coordinate a, b, c ad un piano dato μ la cui equazione sia

$$L x + M y + N z + P = 0$$

parallelamente ad una data retta, rappresentata dall'equazione

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}. \tag{1}$$

L'equazione della retta condotta per P e parallela alla retta data e sulla quale si conta la distanza richiesta, saranno

$$\frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C} = \rho.$$

Posto quindi

$$H = L\,a + M\,C + N\,c + P$$
$$H' = L\,A + M\,B + N\,C$$

saranno

$$x_1 = a - \frac{H}{H'} \qquad y_1 = b - \frac{H}{H'} \qquad z_1 = c - \frac{H}{H'}$$

le coordinate del piede di tale distanza sul piano, quindi, indicandola con δ, si avrà

$$\delta^2 = \frac{H^2\,(A^2 + B^2 + C^2)}{H'^2} =$$
$$= \frac{H^2\,(A^2 + B^2 + C^2)\,(L^2 + M^2 + A^2)}{H'^2\,(A^2 + B^2 + C^2)}$$

ossia

$$\delta^2 = \frac{(L\,a + M\,b + N\,c + P)^2}{\cos^2\theta\,(L^2 + M^2 + N^2)}$$

ove θ non è altro che l'angolo che la direzione della distanza fa colla normale abbassata dal punto al piano.

Indicando con α, β, γ gli angoli che la direzione della normale condotta dall'origine al piano fa cogli assi; e con p la lunghezza della normale stessa si avrà

$$\delta^2 = \frac{(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma - p)^2}{\cos^2\theta} \qquad \text{(I)}$$

quindi il valore richiesto di δ. Del resto la stessa formola si può ottenere direttamente osservando che il numeratore non è altro che il quadrato della distanza (normale) del punto (a, b, c) dal piano μ; e quindi si ha appunto in valore assoluto:

$$d = \delta \cos \theta :$$

onde l'espressione trovata della distanza stessa δ. Per la distanza δ' di un altro punto E dal piano μ, condotta parallelamente alla retta stessa (1), si avrà;

$$\delta'^2 = \frac{(l \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos \gamma - p)^2}{\cos^2 \theta},$$

essendo l, m, n le coordinate del punto E. Essendo adunque:

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma - p}{l \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos \gamma - p},$$

le formole

$$\left.\begin{array}{c} \rho\, x_r = \dfrac{x \cos \alpha_r + y \cos \beta_r + z \cos \gamma_r - p_r}{l \cos \alpha_r + m \cos \beta_r + n \cos \gamma_r - p_r} \\ (r = 1, 2, 3, 4), \end{array}\right\} \quad (11)$$

ove ρ è numero arbitrario, servono a passare da un sistema di coordinate cartesiane rettangolari ad un sistema qualunque di coordinate proiettive omogenee, essendo

$$x \cos \alpha_r + y \cos \beta_r + z \cos \gamma_r - p_r = 0 \; (r = 1, 2, 3, 4),$$

le equazioni dei 4 piani fondamentali $A_2\, A_3\, A_4$, $A_3\, A_4\, A_1$, $A_2\, A_1\, A_4$, $A_1\, A_2\, A_3$. Rendendo omogenee le (II) nelle x, y, z col porre

$$x = \frac{X}{T}, \quad \frac{Y}{T}, \quad \frac{Z}{T}$$

e ricavando da esse i valori proporzionali delle X, Y, Z, T, allora avremo, coi rapporti $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$, i valori di x, y, z per mezzo delle coordinate x_r; potremo quindi trasformare ogni relazione in coordinate cartesiane di punti, nella corrispondente relazione in coordinate omogenee.

2. Vogliamo ora trovare un altro significato che possono avere i coefficienti dell'equazione di un piano, in coordinate cartesiane rettangole. Osserviamo a tale scopo che se siano $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_3\ y_3\ z_3$ le coordinate dei vertici A, B, C di un triangolo del piano, l'equazione di esso sarà:

$$\alpha_x = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = o$$

ossia

$$x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ora i coefficienti di x, y, z dell'equazione del piano divisi per 2 non sono altro che (vedi *Geometria analitica del piano*, pag. 95), le projezioni dell'area del triangolo ABC rispettivamente sui piani coordinati yz, zx, xz.

Immaginiamo ora per il punto A un piano parallelo al piano yz e siano B', C' le projezioni ortogonali di B, C sopra un tal piano; sarà allora $AB'C'$ un triangolo avente per area la projezione di ABC sul piano yz. Ora essendo eguali i tetraedri $ABB'C$, $BAB'C'$ ed indicando con h la distanza (normale) di B' dal piano ABC, con α, β, γ le inclinazioni della normale al piano cogli assi; e ponendo $h' = BB'$, si avrà

$$\text{triangolo } ABC \times h = \text{ triangolo } AB'C' \times h'$$

quindi, essendo

$$\frac{h'}{h} = \cos \alpha;$$

ed indicando con Δ l'area del triangolo ABC e con Δ' la sua projezione, ossia quella di $AB'C'$, si avrà

$$\Delta' = \Delta \cos \alpha; \qquad \text{(III)}$$

quindi l'equazione del piano si potrà mettere sotto

$$x\, 2\, \Delta \cos \alpha + y\, 2\, \Delta \cos \beta + z\, 2\, \Delta \cos \gamma = 2\, \Delta\, p;$$

essendo adunque α, β, γ gli angoli della normale al piano cogli assi e p la distanza dell'origine O dal piano stesso. Segue di qui immediatamente che se x, y, z sono le coordinate di un punto D fuori del piano il determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

è, in valore assoluto, il sestuplo del volume del tetraedro $ABCD$.

3. Vogliamo ora trovare in grandezza e direzione la minima distanza di due rette r, r' che non si tagliano. Siano

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$$

$$\frac{x-a'}{A'} = \frac{y-b'}{B'} = \frac{z-c'}{C}$$

l'equazioni delle due rette. Si sa che la minima distanza di due rette è diretta secondo la perpendicolare comune alle rette stesse; onde risulta subito che l'equazioni

$$\frac{x}{BC'-B'C} = \frac{y}{CA'-C'A} = \frac{z}{AB'-A'B}$$

rappresenteranno una retta condotta per l'origine e parallela alla minima distanza stessa.

Ponendo per brevità

$$L = BC' - B'C, \; M = CA' - C'A, \; N = AB' - A'B;$$

ed essendo:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x+\beta x+\gamma z+\delta &= o \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta' &= o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

l'equazioni dei piani condotti rispettivamente per le rette r, r' e paralleli alla minima distanza, si dovrà avere

$$\begin{aligned} &\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta=o &\quad& \alpha' a'+\beta' b'+\gamma' c'+\delta'=o \\ &\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta=o && \alpha' A'+\beta' B'+\gamma' C' \quad =o \\ &\alpha L+\beta M+\gamma N \quad =o && \alpha' L'+\beta' M'+\gamma' N' \quad =o \end{aligned}$$

d'onde

$$\left.\begin{aligned} &\alpha:\beta:\gamma:\delta= \\ &=BN-CM:CL-AN:AM-BL:-\begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ L & M & N \end{vmatrix} \\ &\alpha':\beta':\gamma':\delta'= \\ &=B'N-C'M:C'L-A'M:A'M-B'L:-\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ A' & B' & C' \\ L & M & N. \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}(2)$$

Sostituendo ora nelle (1) in luogo di α, β, γ, δ; α', β', γ', δ' le quantità proporzionali date dalle (2) avremo, coi dati del problema, l'equazioni dei due piani la cui intersezione è appunto la minima distanza richiesta. Dunque la posizione effettiva della minima distanza resta in tal modo determinata.

Per trovarne la grandezza osserviamo che essendo

$$\lambda x+\mu y+\nu z+\pi=o$$

l'equazione del piano ω condotto per la retta r

e parallelo alla retta r', si avrà;

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu b + \nu c + \pi &= o \\ \lambda A + \pi B + \nu C \quad &= o \\ \lambda A' + \mu B' + \nu C' \quad &= o \end{aligned}$$

onde

$$\lambda : \mu : \nu : \pi = \\ = BC' - B'C : CA' - C'A : AB' - A'B : - \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

Il piano condotto per r parallelo alla minima distanza sega la retta r' in un punto P' le cui coordinate x_1, y_1, z_1 sono date dalle:

$$x_1 = \frac{a'\delta_2 + A'\delta_1}{\delta_2}, y_1 = \frac{b'\delta_2 + B'\delta_1}{\delta_2}, z_1 = \frac{c'\delta_2 + C'\delta_1}{\delta_2}$$

ove si è posto:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a - a' & b - b' & c - c' \\ A & B & C \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{vmatrix}, \delta_2 = \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{vmatrix}.$$

Essendo:

$$BN' - M'C = L_1,\ CL' - N'A = M_1,\ AM' - L'B = N_1$$

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

ed, osservando che la minima distanza d non è altro che la perpendicolare abbassata dal punto

P' di r' sul piano ω condotto per r e parallelo ad r', si avrà

$$d = \pm$$

$$\pm \frac{L(a'\delta_2 + A'\delta_1) + M(b'\delta_2 + B'\delta_1) + N(c'\delta_2 + C'\delta_1) - \delta_0\delta_2}{\delta_2\sqrt{L^2{}_1 + M^2{}_1 + N^2{}_1}}.$$

E per essere

$$A' L + B' M + C' N = o$$

si avrà finalmente

$$d = \pm \frac{(a - a') L_1 + (b - b') M_1 + (c - c') N_1}{\sqrt{L^2{}_1 + M^2{}_1 + N^2{}_1}} \quad \text{(I)}$$

per calcolare, coi dati del problema, la minima distanza cercata.

Se sia θ l'angolo delle due rette r, r' si avrà

$$d \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{(a - a') L_1 + (b - b') M_1 + (c - c') N_1}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Indichiamo ora con P, R i punti della retta r di coordinate a, b, c; a_1, b_1, c_1; e con T, S i punti di r' rispettivamente di coordinate a', b', c'; a'_1, b'_1, c'_1. Saranno:

$$p_{23} = b\,c_1 - b_1\,c \quad p_{31} = c\,a_1 - a\,c_1 \quad p_{12} = a\,b_1 - a_1\,b$$

$$p_{14} = a - a_1 \quad p_{24} = b - b_1 \quad p_{34} = c - c_1$$

le coordinate p_{rs} locali della retta r; e similmente siano p'_{rs} le coordinate di $r' = S\,T$. La formola (I), che dà la minima distanza, essendo:

$$A : B : C = a - a_1 : b - b_1 : c - c_1$$

$$A' : B' : C' = a' - a'_1 : b' - b'_1 : c' - c'_1,$$

si porrà sotto la forma:

$$d \operatorname{sen} \theta = \pm$$

$$\pm \frac{p_{23}\,p'_{14} + p_{31}\,p'_{24} + p_{12}\,p'_{34} + p'_{23}\,p_{14} + p'_{31}\,p_{24} + p'_{12}\,p_{34}}{\sqrt{\{(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2\}\{(a'-a'_1)^2+(b'-b'_1)+(c'-c'_1)^2\}}}; \;($$

ed indicando con l, l' i segmenti PR, ST si avrà

$$l\,l'\,\delta \operatorname{sen} \theta = \pm \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & 1. \end{vmatrix} \qquad \text{(III)}$$

Da cui la nota proposizione che il volume di un tetraedro è il sestuplo del prodotto di due spigoli opposti nella loro minima distanza, e nel seno dell'angolo compreso. Di qui risulta di nuovo la condizione perchè due rette r, r' nello spazio si taglino; perchè quando ciò accade la loro minima d deve essere nulla epperò il numeratore delle (II) ossia il 2.° membro della (III) deve essere zero.

§ 8. **Formole e trasformazione delle coordinate Cartesiane in generale.**

1. In generale projettare da un *asse* s sopra una retta x una figura composta di punti $M_1, M_2 \dots$ significa projettare dall'asse i punti della figura, cioè costruire i piani $s\,M_1$, $s\,M_2 \dots$ e poscia tagliare i piani projettanti $s\,M_1$, $s\,M_2 \dots$ colla retta x; ad ottenere così una punteggiata M'_1, $M'_2 \dots$ formata dai punti *proiezioni* dei punti della figura. Se l'asse s da cui si projetta è la retta all'infinito di un piano π allora i piani projettanti saranno paralleli al piano π e paralleli fra loro.

Ciò posto due punti A, B di una retta siano projettati sopra una retta x, che diremo *asse di projezione,* da piani paralleli ad un piano fisso π; le projezioni A', B' di A, B determinano un segmento $A' B'$ che si dirà la *projezione del segmento $A B$ fatta sull'asse x essendo dirigente il piano π.*

Se da A immaginiamo una parallela all'asse x di projezione, indi una normale al piano π; e indichiamo rispettivamente con B_1 e B'' i punti ove le rette nominate segano il piano projettante il punto B, avremo:

$$A B_1' = A B \cos \widehat{B A B_1}, \qquad A B_1' = A' B' \cos \widehat{B_1 A B''}$$

ed indicando con (πx) l'angolo che il piano π fa colla *direzione* x dell'asse; e con (πr) l'angolo che lo stesso piano fa colla direzione r della retta $A B$, si avrà:

$$A' B' = A B \frac{\operatorname{sen}(\pi r)}{\operatorname{sen}(\pi x)} \tag{I}$$

Cioè:

La proiezione di un segmento $A B$ di retta sopra un asse x, essendo dirigente un piano π, eguaglia il segmento obbiettivo nel rapporto dei seni degli angoli che il piano dirigente fa colla retta $A B$ e coll'asse di proiezione.

2. Sia ora $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ un *poligono gobbo semplice,* cioè la figura che si ottiene unendo il primo punto A_1 col 2.° A_2, il 2.° A_2 col 3.° A_3; e così via finalmente l'ultimo punto A_n col primo, essendo i punti A_1, A_2, ... A_n dati comunque nello spazio cioè quattro qualunque di essi non essendo in uno stesso piano. Proiettiamo il poligono sopra una retta x essendo dirigente il piano π, otterremo una punteggiata proiezione A'_1, A'_2, A'_3 ... A'_n composto di n punti; e si avrà

$$A'_1 A'_2 + A'_2 A'_3 + A'_3 A'_4 + \dots + A'_n A'_1 = o \quad (1)$$

cioè, dicendo *lato* di un poligono gobbo la grandezza $A_1 A_2$ del lato stesso, avremo:

La somma delle proiezioni dei lati di un poligono gobbo semplice sopra un asse è zero.

Dalla (1) si ricava

$$A'_1 A'_n = A'_1 A'_2 + A'_2 A'_3 + \dots + A'_{n-1} A'_n \quad (2)$$

3. Ciò posto, siano dati in direzione e grandezza tanti segmenti r_1, r_2 ... r_p di retta; e immaginiamoli trasportati nello spazio parallelamente a sè stessa e nella propria direzione in modo che l'estremo dell'una cada nell'origine dell'altra, avremo così una spezzata gobba; ed unendo l'origine del primo segmento coll'estremo dell'ultimo segmento, otterremo un segmento r che si dirà il segmento *risultante* di tutti i segmenti dati che saranno detti segmenti *componenti;* ed osservando che il segmento risultante ed i componenti sono i lati di un poligono gobbo semplice, avremo per la (2)

La proiezione sopra un asse x di un segmento risultante di più segmenti dati eguaglia la somma algebrica delle proiezioni dei segmenti componenti; essendo dirigente uno stesso piano π.

4. Essendo x, y, z tre assi ortogonali proiettiamo ortogonalmente sopra ciascuno degli assi il poligono gobbo $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ ad ottenerne le punteggiate

$$A'_1\,A'_2\,A'_3 \ldots A'_n \qquad A''_1\,A''_2\,A''_3 \ldots A''_n$$
$$A'''_1\,A'''_2\,A'''_3 \ldots A'''_n$$

rispettivamente sugli assi x, y, z. Avremo:

$$\left.\begin{aligned} A'_1\,A'_2 &= A_1\,A_2 \cos(A_1\,A_2, x), \\ &\qquad A'_2\,A'_3 = A_2\,A_3 \cos(A_2\,A_3, x) \ldots \\ A''_1\,A''_2 &= A_1\,A_2 \cos(A_1\,A_2, y), \\ &\qquad A''_2\,A''_3 = A_2\,A_3 \cos(A_2\,A_3, y) \ldots \\ A'''_1\,A'''_2 &= A_1\,A_2 \cos(A_1\,A_2, z), \\ &\qquad A'''_2\,A'''_3 = A_2\,A_3 \cos(A_2\,A_3, z) \ldots \end{aligned}\right\} (a)$$

e si avrà

$$A_1\,A_n \cos(A_1\,A_n x) = A'_1\,A'_n = A'_1\,A'_2 + A'_2\,A'_3 + \ldots + A'_{n-1}\,A'_n$$

$$A_1\,A_n \cos(A_1\,A_n y) = A_1''\,A_n'' = A_1''\,A_2'' + A_2''\,A_3'' + \ldots + A''_{n-1}\,A_n''$$

$$A_1\,A_n \cos(A_1\,A_n z) = A_1'''\,A_n''' = A_1'''\,A_2''' + A_2'''\,A_3''' + \ldots + A'''_{n-1}\,A_n''',$$

onde quadrando e sommando ed avuto riguardo alla relazione fra i coseni degli angoli di una retta con tre assi ortogonali, si avrà

$$\left.\begin{aligned} \overline{A_1\,A_n}^2 &= \overline{A_1\,A_2}^2 + \overline{A_2\,A_3}^2 + \ldots + \overline{A_{n-1}\,A_n}^2 + \\ &+ 2\,A_1\,A_2 \,.\, A_2\,A_3 \cos(A_1\,A_2 \,.\, A_2\,A_3) + \\ &+ 2\,A_2\,A_3 \,.\, A_3\,A_4 \cos(A_2\,A_3 \,.\, A_3\,A_4) + \ldots \end{aligned}\right\} (\mathrm{I})$$

cioè:

Il quadrato del segmento risultante eguaglia la somma dei quadrati dei componenti più i loro doppi prodotti, presi a due a due in tutti i modi differenti possibili, nel coseno dell'angolo compreso.

5. Siano ora x, y, z tre assi obliqui che si tagliano nell'*origine* O e siano x, y, z le coordinate OQ, QP, PM cartesiane oblique di un punto M rispetto agli assi stessi. Essendo adunque yz, zx, xy i piani coordinate ed x, y, z le direzioni degli assi; indicando inoltre con r il segmento OM, avremo

$$x = r \cdot \frac{\operatorname{sen}(yz.r)}{\operatorname{sen}(yz.x)} \quad y = r \frac{\operatorname{sen}(zy.r)}{\operatorname{sen}(zx.y)} \quad z = r \frac{\operatorname{sen}(xy.r)}{\operatorname{sen}(xy.z)} \quad (1)$$

per espressioni delle coordinate di un punto M col mezzo della sua distanza $OM = r$ dall'origine.

Essendo r la risultante delle x, y, z, ossia OM risultante delle OQ, QP, PM, si avrà

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu \quad (\mathrm{I})$$

indicando per brevità con λ, μ, ν gli angoli (yz), (zx), (xy) degli assi fra loro presi a due a due.

La formola (I) serve a dare la distanza di un punto dall'origine. Possiamo anche dire, per le definizioni date, che *le coordinate* x, y, z *di un punto sono le componenti parallele agli assi delle distanze* OM *del punto dall'origine.*

Per un altro punto M' di coordinate x', y', z' sia r' la distanza OM' e indichiamo con d il segmento MM' ed essendo d risultante di

$$x - x', \quad y - y' \quad z, - z',$$

si avrà

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + 2(y - y')(z - z')\cos\lambda +$$
$$+ 2(z - z')(x - x')\cos\mu +$$
$$+ 2(x - x')(y - y')\cos\upsilon$$

formola che dà la distanza di due punti espressa per mezzo delle rispettive coordinate.

6. Per le posizioni fatte, indicando con ω l'angolo $M\,O\,M'$, si avrà

$$d^2 = r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos\omega$$

onde

$$\cos\omega = \frac{r^2 + r'^2 - d^2}{2\,r\,r'}. \qquad (a)$$

Ciò posto siano

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \quad \frac{x}{A'} = \frac{y}{B'} = \frac{z}{C'}, \qquad (b)$$

l'equazioni delle rette $O\,M$, $O\,M'$ uscenti dall'origine posto in generale

$$[L\,M\,N] =$$
$$= \sqrt{L^2 + M^2 + N^2 + 2\,M\,N\cos\lambda + 2\,M\,L\cos\mu\,2\,L\,M\cos\upsilon}$$

si avrà per la (a)

$$\cos\omega = \qquad (III)$$
$$\frac{C' + B'C)\cos\lambda + (C\,A' + C'\,A)\cos\mu + (A\,B' + A'\,B)\cos\upsilon + (A\,A' + B\,B' + C\,C'),}{[A\,B\,C]\,[A'\,B'\,C']}$$

formola che dà il coseno dell'angolo ω delle due rette rappresentate dall'equazioni (b).

Quindi per il seno dell'angolo ω delle due rette si avrà

$$\operatorname{sen}^2 \omega = \frac{\begin{vmatrix} L & M & N & O \\ 1 & \cos \nu & \cos \mu & L \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & M \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & N \end{vmatrix}}{[A\,B\,C]^2 \,.\, [A'\,B'\,C']^2} \qquad \text{(IV)}$$

essendosi posto

$$B\,C' - B'\,C = L, \quad C\,A' - C'\,A = M, \quad A\,B' - A'\,B = N$$

7. Come abbiamo fatto per le coordinate cartesiane rettangolari si deduce allo stesso modo che l'equazioni di una retta r si possano mettere sotto la forma

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$$

essendo a, b, c le coordinate di un punto fisso della retta ed x, y, z quella del punto corrente. Un' altra retta r' abbia per equazioni

$$\frac{x-a'}{A'} = \frac{y-b'}{B'} = \frac{z-c'}{C'}\,;$$

ed allora quando si abbia:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \qquad \text{(V)}$$

le rette r, r' sono parallele. Infatti, sono nello stesso piano ed hanno i loro piani, projettanti, sopra uno stesso piano coordinato, che sono paralleli perchè ne sono parallele le traccie. Le formole quindi precedentemente trovate danno il coseno ed il seno di un loro angolo ω; di due rette quali si vogliano dello spazio e dicono che quando abbia luogo la relazione

$$\left.\begin{aligned} & AA' + BB' + CC' + (BC' + B'C)\cos\lambda + \\ & + (CA' + C'A)\cos\mu + (AB' + A'B)\cos\nu = o \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

le rette r, r' sono fra loro perpendicolari; e sono invece parallele appunto se hanno luogo (V).

8. Dato un piano μ la cui equazione sia

$$Lx + My + Nz + P = o$$

ed un altro piano ν di cui l'equazione sia

$$L'x + M'y + N'z + P' = o$$

vogliamo trovare le condizioni perchè i due piani siano paralleli. Or due piani paralleli sono tagliati da un terzo in due rette parallele; e se due piani sono tagliati da altri due piani in coppie di rette parallele i due piani sono paralleli, dunque le condizioni richieste saranno:

$$\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'};$$

perchè i piani μ, ν sono paralleli se lo sono le loro traccie su due dei piani coordinati yz, zx e xy.

9. Vogliamo ora condurre da un punto dato di coordinate a, b, c la perpendicolare ad un piano dato μ.

Una retta sarà perpendicolare al piano μ quando lo sia a due rette di esso, per esempio alle sue traccie sui due piani coordinati, per esempio sui piani $y\,z$, $z\,x$. L'equazioni della retta cercata saranno della forma:

$$\frac{x-a}{E}=\frac{y-b}{F}=\frac{z-c}{G}$$

e perchè la retta deve essere perpendicolare alle traccie ora considerate del piano μ, si avrà:

$$E(N\cos\nu-M\cos\mu)+F(N-M\cos\lambda)+G(N\cos\lambda-M)=o$$
$$E(N-L\cos\mu)+F(N\cos\nu-L\cos\lambda)+G(N\cos\mu-L)=o$$

e ponendo per brevità

$$1-\cos^2\lambda=\operatorname{sen}^2\lambda=\mathsf{l}\quad 1-\cos^2\mu=\operatorname{sen}^2\mu=\mathsf{m}$$
$$1-\cos^2\nu=\operatorname{sen}^2\nu=\mathsf{n}$$

e:

$$\cos\mu\,\cos\nu-\cos\lambda=\mathsf{l}_1\qquad\cos\nu\,\cos\lambda-\cos\mu=\mathsf{m}_1$$
$$\cos\lambda\,\cos\mu-\cos\nu=\mathsf{n}_1$$

si avrà:

$$\left.\begin{array}{c}E:F:G=\\=L\mathsf{l}+M\mathsf{n}_1+N\mathsf{m}_1:L\mathsf{n}_1+M\mathsf{m}+N\mathsf{l}_1:L\mathsf{m}_1+M\mathsf{l}_1+N\mathsf{n}\end{array}\right\}(h)$$

e si ha quindi reciprocamente:

$$\left.\begin{array}{c}L:M:N=E+F\cos\nu+G\cos\mu:\\:E\cos\nu+F+G\cos\lambda:E\cos\mu+F\cos\lambda+G.\end{array}\right\}(k)$$

Le formole (h) servono a risolvere il problema proposto. Le (k) servirebbero a risolvere il problema inverso: *Condurre per un punto dato un piano perpendicolare ad una retta data.*

10. Le stesse relazioni (h) e (k) servono a rappresentare in particolare la corrispondenza fra i raggi e i piani condotti per l'origine O fra loro perpendicolari; cioè le (h) servono a determinare il raggio r normale al piano ρ rappresentato dall'equazione

$$L x + M y + N z = o$$

e le (k) dànno il piano ρ normale al raggio r rappresentato dall'equazioni

$$\frac{x}{E} = \frac{y}{F} = \frac{z}{G}.$$

La corrispondenza fra gli elementi della stella O quando si faccia corrispondere ad un raggio r il suo piano normale μ è tale che se il raggio percorre un piano, il piano corrispondente ruota intorno al raggio corrispondente al piano percorso. E ciò risulta appunto anche dalle formule (h), (k) che servono a rappresentare la corrispondenza. Poichè il raggio r percorrerà un piano μ

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = o$$

quando fra i parametri E, F, G si abbia la relazione

$$\alpha E + \beta F + \gamma G = o$$

allora fra i parametri L, M, N del piano corrispondente esisterà pure la relazione lineare omogenea nelle L, M, N:

$$\left.\begin{array}{l} L(\alpha l + \beta n_1 + \gamma m_1) + M(\alpha n_1 + \beta m + \gamma l_1) + \\ \qquad + N(\alpha m_1 + \beta l_1 + \gamma n) = o. \end{array}\right\} (e)$$

Questa relazione dice appunto che i piani υ corrispondenti ai raggi del piano μ ruotano intorno al raggio un normale (corrispondente) al piano μ stesso.

La relazione (e) è simmetrica nei parametri L, M, N; α, β, γ dei due piani ν, μ ed esprime la condizione perchè due piani μ, ν siano fra loro perpendicolari.

Si possano così trovare il seno e il coseno di un angolo diedro di due piani; cercandone il seno ed il coseno di un angolo delle relative normali condotto dall'origine; e così trovare le stesse linee trigonometriche dell'angolo di una retta con un piano determinandone quelle di un angolo della retta con una normale al piano, etc.

11. Vogliamo ora trovare le formole speciali che servono a passare da un sistema di coordinate cartesiane ad un altro sistema delle coordinate stesse.

Prima di tutto trattiamo il caso particolare in cui gli assi si trasportano parallelamente a sè stessi e nella propria direzione.

Siano (fig. 5) x', y', z' i nuovi assi, O' la nuova origine ed

$$x_0 = O'Q_1, y_0 = Q_1 P_1, z_0 = P_1 O'$$

le coordinate di O′ rispetto ai primi assi.

Se

$$x = OQ, \quad y = QP, \quad z = PM$$

sono le coordinate di un punto M rispetto ai primi assi;

$$x' = O'Q', \quad y' = Q'P', \quad z' = P'M$$

quelle dello stesso punto M rispetto ai nuovi, avremo

$$O\,Q = O\,Q_1 + Q_1\,Q = O\,Q_1 + O'\,Q'$$

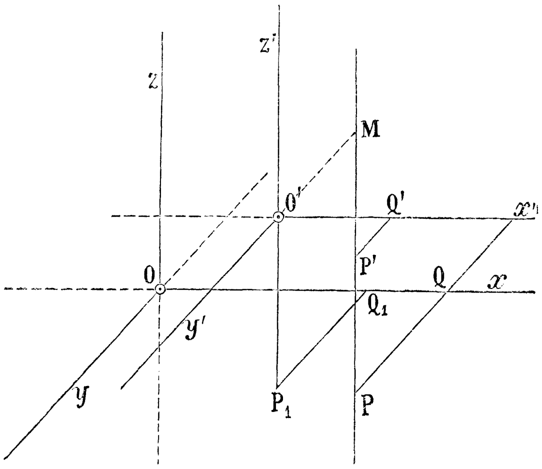

Fig. 3.

ed analogamente per le altre coordinate y, z: onde

$$x = x_o + x' \quad y = y_o + y' \quad z = z_o + z'$$

da cui (I)

$$x - x_o = x' \quad y - y_o = y' \quad z - z_o = z';$$

cioè le cercate formole di trasformazione, che evidentemente valgono anche se i primi, epperò anche i secondi assi, fossero ortogonali.

12. Siano ora x', y', z' le coordinate di un punto M' rispetto sempre ai primitivi assi; ed x, y, z le coordinate di un punto M rispetto ai medesimi assi e pongasi

$$\left.\begin{aligned} x' &= a\ x + b\ y + c\ z + d \\ y' &= a'\ x + b'\ y + c'\ z + d' \\ z' &= a''x + b''y + c''z + d'' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

da cui si ricava

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A}{\alpha}(x' - d) + \frac{A'}{\alpha}(y' - d') + \frac{A''}{\alpha}(z' - d'') \\ y &= \frac{B}{\alpha}(x' - d) + \frac{B'}{\alpha}(y' - d') + \frac{B''}{\alpha}(z' - d'') \\ z &= \frac{C}{\alpha}(x' - d) + \frac{C'}{\alpha}(y' - d') + \frac{C''}{\alpha}(z' - d'') \end{aligned}\right\} (1)'$$

essendo A, B, $C\ldots$ i reciproci degli elementi a, b, $c\ldots$ nel determinante

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

che supponiamo differente da zero. Le (1) od (1)' rappresentano adunque due spazii projettivi, ossia riferiscono projettivamente a sè stesso lo spazio, in modo che il piano all'infinito è un piano unito (vedi pag. 45); M, M' due punti corrispondenti qualsivogliano.

D'altra parte, per ciò che si è notato in generale, l'equazioni (1) servono anche a cambiare i primitivi piani coordinati nei tre piani π, π', π''

qualisivogliano dati dall'equazioni:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = o$$
$$a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = o$$
$$a''\,x + b''\,y + c''\,z + d'' = o.$$

Indichiamo con O' l'intersezione di questi tre piani, che non sono certamente paralleli ad una stessa retta, perchè il determinante α lo abbiamo supposto diverso da zero.

Le coordinate x_o, y_o, z_o di O' sono appunto date dalle

$$x_o = -\frac{A\,d + A'\,d' + A''\,d''}{\alpha}$$

$$y_o = -\frac{B\,d + B'\,d' + B''\,d''}{\alpha}$$

$$z_o = -\frac{C\,d + C'\,d' + C''\,d''}{\alpha}$$

Se indichiamo inoltre con x', y', z' le intersezioni

$$\pi'\,\pi'',\quad \pi''\,\pi,\quad \pi\,\pi'$$

dei tre piani presi a due a due, avremo dunque (fig. 6) tre nuovi assi x', y', z' concorrenti nel punto O' ed x', y', z' saranno adunque le coordinate del punto M rispetto ai nuovi assi stessi.

13. Vogliamo ora trovare il significato geometrico dei coefficienti dell'equazioni (1) od (1)' che servono a passare da un sistema di assi ad un altro sistema. Intanto i termini noti d, d', d''

delle (1) non sono altro che le coordinate x'_o, y'_o, z'_o della primitiva origine rispetto ai nuovi assi. Osserviamo poi che per

$$x = 1, \qquad y = o, \qquad z = o$$

si ha:

$$x' - x'_o = a,$$

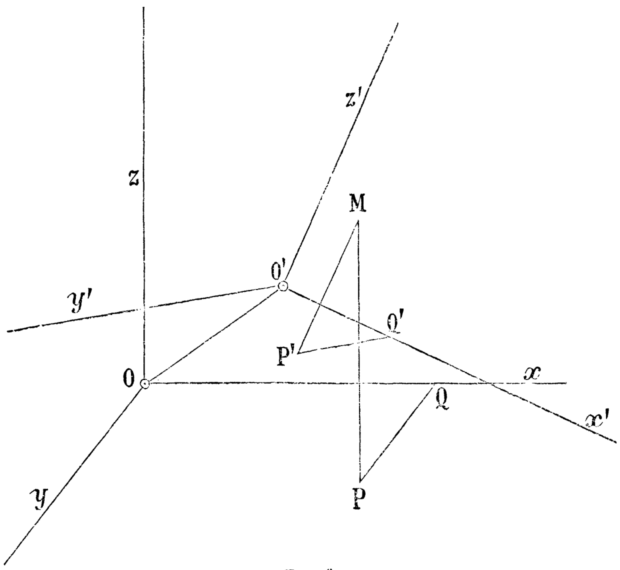

Fig. 6.

ove con x' si indica adunque la nuova coordinata x' del punto P situato sul primitivo asse delle x alla distanza *uno* dall'origine. Ora $x' - x'_o$ è dunque la projezione della distanza $O\,P = 1$ fatta sul nuovo asse x' essendo dirigente il piano

$y'\ z'$ e si avrà quindi

$$x' - x'_{\circ} = a = \frac{\operatorname{sen}(y'\,z',x')}{\operatorname{sen}(y'\,z',x')}.$$

In modo analogo si determinano gli altri coefficienti tanto nelle (1) che nelle (1)′ e le formole di trasformazione diventano

$$\left.\begin{aligned}
x' &= x'_{\circ} + \\
&+ \frac{x \operatorname{sen}(y'\,z',x) + y \operatorname{sen}(x'\,z',y) + z \operatorname{sen}(y'\,z',z)}{\operatorname{sen}(y'\,z',x')} \\
y' &= y'_{\circ} + \\
&+ \frac{x \operatorname{sen}(z'\,x',x) + y \operatorname{sen}(z'\,x',y) + z \operatorname{sen}(z'\,x',z)}{\operatorname{sen}(z'\,x',y')} \\
z' &= z'_{\circ} + \\
&+ \frac{x \operatorname{sen}(x'\,y',x) + y \operatorname{sen}(x'\,y',y) + z \operatorname{sen}(z'\,y',z)}{\operatorname{sen}(x'\,y',z')}
\end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned}
x &= x_{\circ} + \\
&+ \frac{x' \operatorname{sen}(y\,z,x') + y' \operatorname{sen}(y\,z,y') + z' \operatorname{sen}(y\,z,z')}{\operatorname{sen}(y\,z,x)} \\
y &= y\ \ + \\
&+ \frac{x' \operatorname{sen}(z\,x,x') + y' \operatorname{sen}(z\,x,y') + z' \operatorname{sen}(z\,x,z')}{\operatorname{sen}(z\,x,y)} \\
z &= z_{\circ} + \\
&+ \frac{x' \operatorname{sen}(x\,y,x') + y' \operatorname{sen}(x\,y,y') + z' \operatorname{sen}(x\,y,z')}{\operatorname{sen}(x\,y,z)}
\end{aligned}\right\} \text{(I)}'$$

Del resto dati in posizione ed in direzione i nuovi assi x', y', z' e quindi la loro origine O'

le formole (I) e così le (I)' si potevano dedurre col principio della retta risultante (vedi pag. 90). Così la retta $O'Q' = x'$ è risultante di

$$O'O,\ OQ,\ QP,\ PM,\ MP',\ P'Q'$$

dunque la proiezione della risultante $O'Q'$ fatta sull'asse x' essendo dirigente il piano $y'z'$ sarà eguale alla somma delle proiezioni analoghe delle componenti: da cui subito la prima delle (I) e così per le altre e per le (I)'.

14. Del resto per passare da un sistema di assi ad un altro sistema, si possono dapprima trasportare gli assi parallelamente a sè stessi e nella propria direzione ad avere la nuova origine; e così il problema è ricondotto a trasformare un sistema di assi in un altro sistema aventi la medesima origine O; cioè le formole di trasformazione non contengono termini noti e si riducono alla forma:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a\ \ x + b\ \ y + c\ \ z \\ y' &= a'\ x + b'\ y + c'\ z \\ z' &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}\right\}(a)$$

onde

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A}{\alpha}x' + \frac{A'}{\alpha}y' + \frac{A''}{\alpha}z' \\ y &= \frac{B}{\alpha}x' + \frac{B'}{\alpha}y' + \frac{B''}{\alpha}z' \\ z &= \frac{C}{\alpha}x' + \frac{C'}{\alpha}y' + \frac{C''}{\alpha}z', \end{aligned}\right\}(b)$$

ossia, colle date interpretazioni dei coefficienti,

$$\left.\begin{aligned}
&x' = \\
&= \frac{x \operatorname{sen}(y'z', x) + y \operatorname{sen}(y'z', y) + z \operatorname{sen}(y'z', z)}{\operatorname{sen}(y'z', x')} \\
&y' = \\
&= \frac{x \operatorname{sen}(z'x', x) + y \operatorname{sen}(z'x', y) + z \operatorname{sen}(x'z', z)}{\operatorname{sen}(y'z', x')} \\
&z' = \\
&= \frac{x \operatorname{sen}(x'y', x) + y \operatorname{sen}(x'y', y) + z \operatorname{sen}(x'y', z)}{\operatorname{sen}(x'y', z')}
\end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

e le altre che si ottengono cambiando le lettere accentate con quelle senza accenti e viceversa; e che servono a dare le primitive coordinate mediante le nuove.

Supponiamo ora che i primitivi assi x, y, z siano rettangolari. Essendo

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

gli angoli che la normale rispettivamente ai piani, $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ fa cogli assi x, y, z; e θ, θ', θ'',

gli angoli che le normali ai piani $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ fanno rispettivamente con x', y', z', si avrà;

$$\left.\begin{aligned}
x' &= \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{\cos\theta} \\
y' &= \frac{x \cos\alpha' + y \cos\beta' + z \cos\gamma'}{\cos\theta'} \\
z' &= \frac{x \cos\alpha'' + y \cos\beta'' + z \cos\gamma''}{\cos\theta''}
\end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(x\,x') + y' \cos(x\,y') + z' \cos(x\,z') \\ y &= x' \cos(y\,x') + y' \cos(y\,y') + z' \cos(y\,z') \\ z &= x' \cos(z\,x') + y' \cos(z\,y') + z \cos(z\,z') \end{aligned}\right\}\text{(II)}'$$

Queste formole servono a passare da un sistema di coordinate rettangole ad un sistema di coordinate qualunque.

15. Dalle (II), essendo al solito λ, μ, ν gli angoli $(y\,z)$, $(z\,x)$, $(x\,y)$ dei nuovi assi fra loro si ricava

$$x^2 + y^2 + z^2 =$$
$$= x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z' \cos\lambda + 2z'x' \cos\mu + 2x'y' \cos\nu$$

per l'espressione della distanza di un punto dall'origine.

Se finalmente siano anche rettangolari i nuovi assi le formole (III) diventano:

$$\begin{aligned} x' &= x' \cos(x'\,x) + y \cos(x\,y') + z \cos(x'\,z) \\ y' &= x \cos(y'\,x) + y \cos(y\,y') + z \cos(y'\,z) \\ z' &= x \cos(z'\,x) + y \cos(z'\,y) + z \cos(z'\,z) \end{aligned}$$

In altri termini se siano:

$$\alpha\,\beta\,\gamma\,; \quad \alpha'\,\beta'\,\gamma'\,; \quad \alpha''\,\beta''\,\gamma''$$

gli angoli che le direzioni x', y', z' fanno rispettivamente colle x, y, z, le formole di trasformazione diventano

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma \\ y' &= x \cos\alpha' + y \cos\beta' + z \cos\gamma' \\ z' &= x \cos\alpha'' + y \cos\beta'' + z \cos\gamma'' \end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' + z' \cos\alpha'' \\ y &= x' \cos\beta + y' \cos\beta' + z' \cos\beta'' \\ z &= x' \cos\gamma + y \ \cos\gamma' + z' \cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \text{(III)}'$$

Basta osservare il seguente quadro

	x	y	z
x'	α	β	γ
y'	α'	β'	γ'
z'	α''	β''	γ''

per formare subito le formole (III) (III)′ che servono a passare da un sistema di assi rettangolari ad un altro sistema analogo. Essendo i primi assi ortogonali si avrà

$$\overline{\cos}^2\alpha + \overline{\cos}^2\beta + \overline{\cos}^2\gamma = 1$$

$$\overline{\cos}^2\alpha' + \overline{\cos}^2\beta' + \overline{\cos}^2\gamma' = 1$$

$$\overline{\cos}^2\alpha'' + \overline{\cos}^2\beta'' + \overline{\cos}^2\gamma'' = 1\,;$$

e le

$$\cos\alpha' \cos\alpha'' + \cos\beta' \cos\beta'' + \cos\gamma' \cos\gamma'' = o$$

$$\cos\alpha'' \cos\alpha + \cos\beta'' \cos\beta + \cos\gamma'' \cos\gamma = o$$

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = o,$$

se anche i secondi assi sono ortogonali; ed inoltre:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \qquad (1)$$

Quindi dalle (III) si ricaverà appunto:

$$\overline{\cos}^2 \alpha + \overline{\cos}^2 \alpha' + \overline{\cos}^2 \alpha'' = 1$$

$$\overline{\cos}^2 \beta + \overline{\cos}^2 \beta' + \overline{\cos}^2 \beta'' = 1$$

$$\overline{\cos}^2 \gamma + \overline{\cos}^2 \gamma' + \overline{\cos}^2 \gamma'' = 1,$$

$$\cos\beta \cos\gamma + \cos\beta' \cos\gamma' + \cos\beta'' \cos\gamma'' = o$$

$$\cos\gamma \cos\alpha + \cos\gamma' \cos\alpha' + \cos\gamma'' \cos\alpha'' = o$$

$$\cos\alpha \cos\beta + \cos\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha'' \cos\beta'' = o$$

16. Del resto le relazioni a) e le b) del n. 14, che interpretate geometricamente servono a passare da un sistema di assi ad un altro sistema, non sono altro che le formole di una *sostituzione lineare* e della sua *inversa,* cioè le formole che servono a sostituire alle variabili x, y, z altre variabili x', y', z' legate colle prime da relazioni lineari e reciprocamente. La relazione (1) fra i due sistemi di variabili caratterizza completamente la sostituzione cioè se deve essere:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

la sostituzione lineare, interpretata geometricamente, corrisponde alla trasformazione di assi ortogonali in altri assi pure ortogonali. Ed invero se tale relazione deve aver luogo si dovrà avere per le a)

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^1 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

$$\left.\begin{aligned} b\,c + b'\,c' + b''\,c'' &= o \\ c\,a + c'\,a' + c''\,a'' &= o \\ a\,b + a'\,b' + a''\,b'' &= o \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

Chiamando al solito A, B, C... gli elementi reciproci di a, b, c... nel determinante

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$

si avrà per le relazioni (k)

$$a : a' : a'' = A : A' : A''$$

$$b : b' : b'' = B : B' : B''$$

$$c : c' : c'' = C : C' : C''.$$

Da queste avuto riguardo alle (h) si ricava subito:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A}{\alpha} = a' \quad \frac{A'}{\alpha} = a' \quad \frac{A''}{\alpha} = a'' \\ &\frac{B}{\alpha} = b \quad \frac{B'}{\alpha} = b' \quad \frac{B''}{\alpha} = b'' \\ &\frac{C}{\alpha} = c \quad \frac{C'}{\alpha} = c' \quad \frac{C''}{\alpha} = c'' \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

quindi le b) diventano appunto

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x' + a'\,y' + a''\,z' \\ y &= b\,x' + b'\,y' + b''\,z' \\ z &= c\,z' + c'\,y + c''\,z' \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

e per essere

$$a\,A + b\,B + C\,c = \alpha$$

si ricava subito per le (f)

$$a'\,A'' + b''\,B'' + c'\,C'' = o$$

e così:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \quad & a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'' &= o, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \quad & a''\,a + b''\,b + c''\,c &= o \\ a'' + b'' + c'' &= 1 \quad & a\,a' + b\,b' + c\,c' &= o, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

cioè le nove quantità

$$a, b, c: \quad a', b', c'; \quad a'', b'', c''$$

hanno tutte le proprietà che competono ai nove coseni degli angoli fra loro di due terne di assi ortogonali. Si osserverà poi che il valore del determinante α, che si dice il modulo della sostituzione, è ± 1; perchè si ha per le (4)

$$\alpha^2 = 1.$$

La sostituzione dicesi *ortogonale*, caratterizzata adunque della relazione (1) fra le due serie di variabili.

§ 9. **Sulle superficie di secondo ordine.**
Generazione e generalità.

1. Siano $U=o$, $V=o$, $W=o$ l'equazioni, in coordinate qualisivogliano, di tre piani che si segano nel punto S; ed

$$U'=o\,,\quad V'=o\,,\quad W'=o$$

l'equazioni di altri tre piani che si segano in un altro punto S'. L'equazioni

$$\lambda\, U+\mu\, V+\upsilon\, W=o \tag{1}$$

$$\frac{U}{\lambda}=\frac{V}{\mu}=\frac{W}{\upsilon} \tag{2}$$

rappresentano, al variare di λ, μ, υ; la *stella* di centro S; e propriamente la (1) rappresenta la stella come composta dei suoi piani; le (2) la rappresentano come composta de' suoi raggi. Rappresentando allo stesso modo colle equazioni

$$\lambda'\, U'+\mu'\, V'+\upsilon'\, W'=o \tag{1$'$}$$

$$\frac{U'}{\lambda}=\frac{V'}{\mu}=\frac{W'}{\upsilon} \tag{2$'$}$$

la stella di centro S'; e ponendo:

$$\left.\begin{aligned}\rho\,\lambda &= a_{11}\,\lambda'+a_{12}\,\mu'+a_{13}\,\upsilon'\\ \rho\,\mu &= a_{21}\,\lambda'+a_{22}\,\mu'+a_{23}\,\upsilon'\\ \rho\,\upsilon &= a_{31}\,\lambda'+a_{32}\,\mu'+a_{33}\,\upsilon',\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

ove ρ è un numero arbitrario, avremo posta una *corrispondenza lineare* fra le due stelle S, S' e propriamente esse saranno riferite fra loro proiettivamente, ossia saranno in corrispondenza proiettiva se le due stelle sono rappresentate dalle equazioni (1), (1)$'$ e (2), (2)$'$ rispettivamente; e invece si diranno in *corrispondenza reciproca,* o *riferite fra loro reciprocamente,* se essendo una di esse, per esempio, la S rappresentata dall'equazioni (2) l'altra S' sia rappresentata da una sola equazione (1)$'$.

Se invece fossero $u = o$, $v = o$, $w = o$ l'equazioni tangenziali di tre punti che determinano un piano σ; e $u' = o$, $v' = o$, $w' = o$ quelli di altri tre punti che determinano un altro piano σ', allora le (1) col mezzo dell'equazioni analoghe alle (1), (2); (1)$'$, (2)$'$ riferirebbero fra loro proiettivamente i due piani σ, σ' oppure *reciprocamente.* Essendo adunque due piani reciproci, la figura *correlativa* nello spazio di due stelle reciproche, si otterranno le proprietà dei piani reciproci da quelle di due stelle reciproche seguendo il Principio di dualità dello spazio, ossia immaginando nello spazio una corrispondenza lineare reciproca; perciò basterà considerare quindi o due stelle reciproche o due sistemi piani reciproci.

Intanto risulta subito:

Due stelle reciproche sono in corrispondenza tale che ad un raggio m dell'uno corrisponde un piano μ' dell'altra; e ad un raggio g della prima

Due sistemi piani reciproci sono in corrispondenza tale che ad punto M dell'uno corrisponde una retta m' dell'altro in modo che *situato in un piano μ di essa corrisponde nella seconda un piano μ' che passa pel raggio m' corrispondente al piano μ della prima.*

ad una retta m dell'un piano passante per M corrisponde un punto M' del secondo situato sulla retta m'.

E quindi:

In due stelle reciproche ad un fascio di raggi dell'una corrisponde nell'altra un fascio di piani proiettivo al fascio di raggi.

In due sistemi piani reciproci ad una punteggiata dell'un sistema corrisponde nell' altro sistema un fascio di raggi proiettivo al primo.

Dati quindi quattro piani dell'una stella S tre qualunque dei quali non passano per una stessa retta, e i loro raggi corrispondenti nell'altra stella S' si ottiene subito il raggio che nella stella S' corrisponde ad un altro piano dato μ della stella S.

Dati quindi quattro punti dell'uno piano σ tre qualunque dei quali non siano in una stessa retta, e le quattro rette corrispondenti in σ' si costruisce subito il raggio di σ' che corrisponde ad un punto qualunque M dato in σ.

Osservando reciprocamente che un piano ed un raggio di una stella S ed S' è determinato dal rapporto di due dei tre numeri λ, μ, ν, o λ', μ', ν' al rimanente,

Osservando reciprocamente che un punto ed una retta di un piano σ o σ' sono determinati dal rapporto di due dei numeri λ, μ, ν o λ', μ', ν' al rimanente, ne risulta ne risulta che nelle (I) si possono determinare gli otto coefficienti distinti in modo che l'equazioni stesse rappresentano la corrispondenza reciproca in cui a quattro raggi dati dell'una stella S corrispondono quattro piani dati dell'altra S'.

che nelle (I) si possono determinare gli otto coefficienti distinti in modo che l'equazioni stesse rappresentano la corrispondenza reciproca in cui a quattro raggi dati dell'un piano σ corrispondono quattro punti dati dell'altro piano σ'.

In sostanza due piani σ, σ' riferiti fra loro reciprocamente sono appunto, quando vengono a sovrapporsi, due piani reciproci già definiti nella *Geometria analitica del piano*.

2. Considereremo d'ora innanzi soltanto due stelle S, S' reciproche date dall'equazioni (1), (2)$'$ ed (I) al variare delle quantità λ, μ, υ; λ', μ', υ'; trasportando i risultati ottenuti, a due sistemi piani reciproci col mezzo del Principio di dualità dello spazio.

Intanto risulta che il luogo dei punti M in cui i raggi g della stella S segano i corrispondenti piani π' di S' è anche il luogo dei punti in cui i raggi di S' tagliano i corrispondenti piani di S. Infatti al raggio MS' di S' deve corrispondere in S un piano passante per MS. È chiaro che i centri S ed S' delle due stelle appartengono al luogo, la cui equazione è il risultato delle eliminazioni delle quantità λ, μ, υ; λ', μ', υ' fra le (1), (2)$'$, (I) cioè:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}\,U' + a_{12}\,V' + a_{13}\,W')\,U + \\ (a_{21}\,U' + a_{22}\,V' + a_{23}\,W')\,V + \\ (a_{31}\,U' + a_{32}\,V' + a_{33}\,W')\,W = o\end{array}\right\}\text{(II)}$$

equazione del secondo grado nelle coordinate di un punto qualunque del luogo; dunque:

Date due stelle reciproche S, S′ il luogo dei punti ove i raggi dell'una stella vengono tagliati dai piani corrispondenti dell'altra è una superficie $\Sigma^{(2)}$ di secondo ordine contenente i centri delle due stelle.

Dati due piani reciproci σ, σ' il luogo dei piani che dai punti dell'un piano proiettano le rette corrispondenti dell'altro è una superficie-Inviluppo di seconda classe, che contiene i due piani dati σ, σ'.

3. Per brevità chiameremo d'ora innanzi *Quadrica* ogni superficie del secondo ordine $S^{(2)}$: cioè una superficie rappresentata da un'equazione di secondo grado; e quindi della forma:

$$\left.\begin{array}{l}f(x) = a_{11}\,x_1^2 + a_{22}\,x_2^2 + a_{33}\,x_3^2 + a_{44}\,x_4^2 + \\ + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + 2\,a_{31}\,x_3\,x_1 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + \\ + 2\,a_{14}\,x_1\,x_4 + 2\,a_{24}\,x_2\,x_4 + 2\,a_{34}\,x_3\,x_4 \quad = o\end{array}\right\}(a)$$

essendo $x_r\,(r = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate di un punto corrente del luogo. Come dal piano $x_r = o$ così da qualunque piano dello spazio la quadrica sarà tagliata secondo una conica. Ciò posto; siano S, S', S'' tre punti della superficie. Conduciamo per $S\,S''$ due piani che la taglieranno secondo le coniche $C^{(2)}$, $C'^{(2)}$; e per $S\,S'$ un piano che taglierà di nuovo le coniche $C^{(2)}$, $C'^{(2)}$ nei punti A, B. Se A_1, A_2 sono due punti di $C^{(2)}$ e B_1, B_2 due punti di $C'^{(2)}$, saranno riferite fra loro reciprocamente in modo determinato due stelle S', S'' se siano corrispondenti le coppie di elementi:

$$S' A A_1, \quad S'' A_1; \quad S' A A_2, \quad S'' A_2;$$
$$S' B B_1, \quad S'' B_1; \quad S' B B_2, \quad S'' B_2.$$

Le due stelle produrranno, nel modo detto più sopra, una superficie $\Sigma^{(2)}$ algebrica di secondo ordine a cui appartengono il punto S' e le due coniche $C^{(2)}$, $C'^{(2)}$; perchè le due coniche hanno rispettivamente ciascuna sulla superficie i cinque punti

$$S, S'', A, A_1, A_2; S, S'', B, B_1, B_2.$$

Ma allora ogni piano condotto per S' taglia la superficie data $S^{(2)}$ e quella ora generata $\Sigma^{(2)}$ in due coniche che avendo cinque punti in comune debbono coincidere, dunque:

Come due stelle reciproche determinano nel modo detto una Superficie algebrica del secondo ordine, viceversa ogni superficie algebrica di secondo ordine è generata da due stelle reciproche che hanno i centri in due punti qualisivogliano della superficie; e questa generazione può effettuarsi in infiniti modi per ciascuna coppia di punti.

Come due piani reciproci determinano nel modo già detto una superficie-Inviluppo di seconda classe così, viceversa, ogni inviluppo di seconda classe è generato da due suoi piani riferiti fra loro reciprocamente; e ciò può farsi in infiniti modi differenti per ciascuna coppia di piani dell'inviluppo.

4. Per la quadrica $S^{(2)}$ rappresentata dalla $f(x)=o$, pongasi:

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

essendo $a_{rs}=a_{sr}$. Si ponga inoltre:

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\xi_1 &= \frac{1}{2}f'_{x_1}=a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3+a_{14}\,x_4 \\ \rho\,\xi_2 &= \frac{1}{2}f'_{x_2}=a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3+a_{24}\,x_4 \\ \rho\,\xi_3 &= \frac{1}{2}f'_{x_2}=a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}\,x_3+a_{34}\,x_4 \\ \rho\,\xi_4 &= \frac{1}{2}f'_{x_3}=a_{41}\,x_1+a_{42}\,x_2+a_{43}\,x_3+a_{44}\,x_4, \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I})$$

ρ essendo un numero arbitrario. Essendo A_{rs} l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante simmetrico a, si avrà $A_{rs}=A_{sr}$ e sarà:

$$\left.\begin{aligned} \rho'\,x_1 &= A_{11}\,\xi_1+A_{12}\,\xi_2+A_{13}\,\xi_3+A_{14}\,\xi_4 \\ \rho'\,x_2 &= A_{21}\,\xi_1+A_{22}\,\xi_2+A_{23}\,\xi_3+A_{24}\,\xi_4 \\ \rho'\,x_3 &= A_{31}\,\xi_1+A_{32}\,\xi_2+A_{33}\,\xi_3+A_{34}\,\xi_1 \\ \rho'\,x_4 &= A_{41}\,\xi_1+A_{42}\,\xi_2+A_{43}\,\xi_3+A_{44}\,\xi_4 \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{II})$$

e

$$2f(x)=x_1f'_{x_1}+x_2f'_{x_2}+x_3f'_{x_3}+x_4f'_{x_4}$$

e così:

$$2\,F_{(\xi)}=\xi_1\,F'_{\xi_1}+\xi_2\,F'_{\xi_2}+\xi_3\,F'_{\xi_3}+\xi_1\,F'_{\xi_4} \qquad (h)$$

ove con $F(\xi)$ si denota la funzione che si ottiene ponendo nella $f(x)$ le A_{rs} invece delle a_{rs} e le ζ_r invece delle x_r $(r = 1, 2, 3, 4)$. Pongasi inoltre, in generale:

$$f(y\,z) = f(z\,y) = z_1 f'_{y_1} + z_2 f'_{y_2} + z_3 f'_{y_3} + z_4 f'_{y_4} =$$
$$y_1 f'_{z_1} + y_2 f'_{z_2} + y_3 f'_{z_3} + y_4 f'_{z_4},$$

ed allora l'equazione quadratica:

$$f(y) + 2\lambda f(y\,z) + \lambda^2 f(z) = o \qquad (k)$$

in λ, serve a dare le intersezioni della retta $r = YZ$, che unisce i punti Y, Z di coordinate y_r, z_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ colla quadrica $S^{(2)}$; perchè le coordinate di un punto qualunque di tal retta sono

$$y_r + \lambda z_r \; (r = 1, 2, 3, 4)$$

cioè, per ogni valore dato a λ si ha un punto di YZ.

5. Quindi, come abbiamo appunto dichiarato a pag. 59, risulta, come per le coniche, che l'equazione:

$$f(y\,z) = o$$

ossia

$$x_1 f'_{y_1} + x_2 f'_{y_2} + x_3 f'_{y_3} + x_4 f'_{y_4} = o$$

rappresenta il *piano polare* del punto Y rispetto alla quadrica; e le formole (I), (II) rappresentano il *sistema polare* della quadrica stessa dandone per ciascun punto X di coordinate x_r le coordinate ξ_r del relativo piano polare ξ; e per ciascun piano ξ di coordinate ξ_r le coordinate x_r del relativo polo X. Inoltre la (k) dice che quando il punto Y giace sulla superficie il piano polare η di quel punto è il piano che tocca ivi la quadrica; cioè è il piano che contiene le tangenti in Y alla quadrica $S^{(2)}$ stessa. E risulta così che l'equazione:

$$F(\xi) = o$$

è l'*equazione tangenziale di* $S^{(2)}$, cioè rappresenta l'inviluppo di seconda classe formato dai piani tangenti alla quadrica stessa. Una quadrica, determinata come inviluppo, è dunque generata da due sistemi piani reciproci. Infatti poi, la generazione di $S^{(2)}$ con due stelle reciproche aventi i centri in due punti di essa superficie ha per polare reciproca la generazione di $S^{(2)}$ come inviluppo, cioè la generazioue dell'inviluppo di seconda classe formata dai relativi piani tangenti.

§ 10. Coni quadrici.
Coniche inviluppo di piani tangenti.

1. Consideriamo ora il caso particolare in cui il *discriminante* a della $f(x)$, cioè il determinante (1) § 9 n. 4 sia nullo. Allora i quattro piani

$$f'_{x_1} = o \quad f'_{x_2} \equiv o \quad f'_{x_3} = o \quad f'_{x_4} = o$$

passano per uno stesso punto V appartenente necessariamente alla superficie. Ogni retta condotta per il punto V, di cui indicheremo con

$$v_r \, (r = 1, 2, 3, 4)$$

le coordinate sega la superficie in due punti coincidenti nel punto stesso; e ciò perchè la (k) si riduce alla $\lambda^2 f_{(z)} = o$, essendo $\upsilon_r + \lambda z_r$ le coordinate di una retta qualunque VZ condotta per V Di più se Z è un punto della superficie la retta VZ per la stessa equazione (k) appartiene alla superficie, perchè vi appartengono i varii punti della retta stessa. La quadrica è dunque una figura della stella di centro V perchè è il luogo delle rette che proiettano da V una qualunque conica $C^{(2)}$ sezione della superficie con un piano non passante per V. La quadrica è *un cono quadrico*, o del secondo ordine; V ne è il vertice, le rette passanti per V contenute nella superficie ne sono le *generatrici*; e una conica $C^{(2)}$ sezione del cono con un piano dicesi *direttrice* o *base* del cono.

Risulta ancora subito che *il piano polare di un punto Y passa per il vertice V del cono ed è sempre il medesimo per tutti i punti della retta YV*. Possiamo quindi dire che *ogni raggio della stella V a cui appartiene il cono, ha il suo piano polare rispetto al cono che è un piano della stella stessa V*. Ogni raggio della stella e il relativo piano polare rispetto al cono costituisce il *sistema polare* del cono stesso; e tal sistema è tagliato da un piano, non passante pel vertice del cono, nel sistema polare rispetto alla conica secondo cui il piano taglia il cono.

2. Con le definizioni date segue che la geometria dei coni quadrici nasce da quelle delle coniche colla proiezione da un centro V (vertice del cono) situato fuori del piano della conica. Ogni punto della conica è proiettato da una generatrice del cono; un punto e la sua retta polare rispetto alla conica base sono proiettati da un raggio e dal suo piano polare; se il raggio è una generatrice del cono il piano polare è quello che proietta la tangente in quel punto alla conica ed è piano tangente al cono nei varii punti della generatrice stessa; ossia *lungo quella generatrice.* Il piano tangente al cono lungo una generatrice può definirsi, in modo analogo della tangente alla conica, cioè il piano di due generatrici prossime del cono stesso; o, in altri termini, il piano che taglia il cono secondo due rette coincidenti.

3. Il sistema polare rispetto ad un cono quadrico dimostra il principio di dualità della stella, cioè il principio di trasformazione delle figure della stella che nasce dallo scambiare fra loro gli elementi *raggio* e *piano* della stella. Dalle cose dette sulle coniche risultano quindi le proprietà seguenti dei coni fra loro correlative nella stella.

Proiettando da due generatrici fisse una generatrice variabile di un cono quadrico si ottengono due fasci proiettivi di piani.	*Tagliando con due piani tangenti fissi di un cono un piano tangente variabile di esso si ottengono due fasci proiettivi di raggi.*

Viceversa abbiamo appunto visto a pag. 38 che due fasci proiettivi di piani generano una quadrica che abbiamo detto appunto *cono* se gli assi dei due fasci di piani si tagliano in un punto.

4. Chiamando *angoli poliedri* o *angoli moltispigoli completi* o *semplici* le figure della stella, che nascono dal proiettare dal centro di essa moltilateri o poligoni completi o semplici di un piano non appartenente alla stella, si avranno subito per i coni le proprietà degli angoli moltispigoli *inscritti* e degli angoli poliedri *circoscritti,* che nascono dal proiettare poligoni inscritti, o moltilateri circoscritti ad una conica base del cono ecc.

5. Abbiamo visto che il vertice V di un cono quadrico è un punto tale che conducendo per esso una setta g ad arbitrio, questo sega il cono in due punti riuniti in V; e per questa ragione il punto V dicesi un *punto doppio* della superficie.

Viceversa se una superficie algebrica di secondo ordine ha un punto doppio V è necessariamente un cono di vertice V. Infatti ogni retta che unisce V ad un punto della superficie appartiene alla superficie stessa. Se poi un punto deve essere doppio, bisogna per la (k) che le sue coordinate υ_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ soddisfino all'equazioni

$$f'_{\upsilon_1} = o \quad f'_{\upsilon_2} = o \quad f'_{\upsilon_3} = o \quad f'_{\upsilon_4} = o \qquad (1)$$

perchè la (k) qualunque siano z_1, z_2, z_3, z_4, si deve ridurre alla

$$\lambda^2 f(z) = o,$$

e quindi per qualunque sistema delle z_r si deve avere identicamente

$$z_1 f'_{\upsilon_1} + z_2 f'_{\upsilon_2} + z_3 f'_{\upsilon_3} + z_4 f'_{\upsilon_4} = o;$$

per cui debbono necessariamente aver luogo le (1); e quindi essere nullo il discriminante a.

Se per vertice del cono assumiamo uno dei punti fondamentali, per esempio, il punto A_4 di coordinate $1, 1, 1, o$ l'equazione del cono quadrico sarà necessariamente della forma

$$\left.\begin{array}{c} f(x) = \\ a_{11} x_1{}^2 + a_{22} x_2{}^2 + a_{33} x_3{}^2 + 2 a_{24} x_2{}^2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1{}^2 + 2 a_{11} x_1 x_2 = o \end{array}\right\} (2)$$

Se le coordinate fossero le cartesiane allora l'equazione precedente rappresenterebbe un cono quadrico avente il vertice nell'origine, ponendo in luogo di x_1, x_2, x_3 rispettivamente le x, y, z, coordinate cartesiane di un punto corrente della superficie.

6. Se l'equazione del cono è posta sotto la forma (2) allora l'equazione stessa rappresenta la base del cono, sul piano fondamentale $x_4 = o$. E per le usate posizioni sarà in tal caso:

$$f'_{y_1} x_1 + f'_{y_2} x_2 + f'_{y_3} x_3 = o$$

l'equazione del piano polare del raggio $Y A_4$ che proietta dal vertice A_4 il punto Y della conica $C^{(2)}$ base del cono. Ogni triedro che proietta da A_4 un *triangolo polare* rispetto alla conica base è un *triedro polare* o *coniugato* rispetto al cono; cioè un triedro di cui ciascun spigolo ha per piano polare la faccia opposta.

Per ogni triedro polare preso per triedro fondamentale, nel nostro caso pel triedro determinato dei piani $x_1 = o$, $x_2 = o$, $x_3 = o$, l'equazione del cono si metterà sotto la forma semplice:

$$a\, x_1{}^2 + a\, x_2{}^2 + a\, x_3{}^2 = o.$$

Come per le coniche così per il cono quadrico di un triedro polare uno spigolo è *interno* al cono, gli altri due *esterni.*

7. Consideriamo le due stelle reciproche sovrapposte in corrispondenza involutoria, aventi per centro il vertice A_4 del cono, e formate dai raggi della stella A_4 unitamente ai piani rispettivamente perpendicolari ai raggi stessi. Queste stelle saranno tagliate dal piano $x_4 = o$ in un sistema polare Σ del piano; cosicchè avremo sul piano stesso due sistemi polari quello ora enunciato e quello Σ_1 relativo alla conica $C^{(2)}$ base del cono. I due sistemi polari determinano due sistemi piani proiettivi sovrapposti; in cui sono corrispondenti due punti che sieno i poli di una stessa retta. I due sistemi proiettivi avranno almeno un punto unito A il quale avrà nei due sistemi polari la stessa retta polare a. Inoltre intorno ad A avremo due involazioni di raggi coniugati in Σ, Σ_1, di cui quella relativa a Σ è necessariamente negativa. Dunque le due involuzioni avranno una coppia di raggi b, c coniugati in comune che saranno tagliati dalla retta a rispettivamente nei punti C, B; ed $A\,B\,C$ sarà un triangolo polare comune nei due sistemi polari Σ, Σ_1. Ora proiettando il triangolo $A\,B\,C$ da A_4 si otterrà un *triedro trirettangolo polare* rispetto al cono, che dicesi *triedro principale;* i suoi spigoli e le sue faccie sono gli *assi* e i *piani principali* relativi al cono quadrico stesso.

Assumendo adunque per assi coordinati gli assi principali di un cono quadrico la sua equazione si porrà sotto la forma

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 = o$$

essendo x, y, z le coordinate cartesiane rettangolari di un punto corrente del cono.

8. Siano p_{rs} (vedi pag. 39) le coordinate locali della retta che unisce il vertice V di un cono quadrico con un punto qualunque X di esso; e sia Y un punto qualunque di una conica $C^{(2)}$ base del cono. Se dall'equazioni di $C^{(2)}$ e da quelle della retta VX eliminiamo i rapporti $\frac{y_1}{y_4}$, $\frac{y_2}{y_4}$, $\frac{y_3}{y_4}$, supposto che Y sia quindi anche un punto di VX; cioè il punto ove VX sega il piano di $C^{(2)}$, allora otterremo una relazione omogenea e necessariamente di secondo grado nelle p_{rs} coordinate locali di VX, e sarà l'equazione del cono quadrico considerato quando in essa si suppongano variabili le coordinate x_r $(r = 1 . 2 . 3 . 4)$ del punto X.

Viceversa poi è evidente *che un'equazione omogenea*

$$F(p_{rs}) = o$$

del secondo grado nelle coordinate locali p_{rs} ***di una retta*** p ***dello spazio rappresenta un cono quadrico quando dei due punti che determinano la retta, quindi le sue coordinate*** p_{rs}***, uno si riguardi fisso, e l'altro variabile a soddisfare colle sue coordinate la data relazione.***

9. Correlativamente, essendo

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(\xi) = \alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + \alpha_{44}\xi_4^2 + \\ + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{31}\xi_3\xi_1 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + 2\alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \\ + 2\alpha_{24}\xi_2\xi_4 + 2\alpha_{34}\xi_3\xi_4 = o \end{array}\right\} (1)$$

l'equazione di un inviluppo $\Sigma^{(2)}$ di seconda classe, si ponga:

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{14} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{vmatrix} \qquad \Bigg\} \; (2)$$

ove $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$; ed α è il discriminante della $\varphi(\xi)$, che per ora supponiamo diverso da zero.

Come pel punto fondamentale $\xi_4 = o$ così per qualunque punto dello spazio, i piani dell'Inviluppo passanti per un punto, formano in generale i piani tangenti di un cono quadrico.

Essendo inoltre ρ un numero arbitrario, si ponga

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= \frac{1}{2}\varphi'_{\xi_1} = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3 + \alpha_{14}\xi_4 \\ \rho x_3 &= \frac{1}{2}\varphi'_{\xi_2} = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3 + \alpha_{24}\xi_4 \\ \rho x_3 &= \frac{1}{2}\varphi'_{\xi_3} = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3 + \alpha_{34}\xi_4 \\ \rho x_4 &= \frac{1}{2}\varphi'_{\xi_4} = \alpha_{41}\xi_1 + \alpha_{42}\xi_2 + \alpha_{43}\xi_3 + \alpha_{44}\xi_4 \end{aligned}\right\} \; (I)$$

E chiamando A_{rs} l'elemento reciproco di α_{rs} nel determinante α, avremo reciprocamente

$$\left.\begin{aligned}
\rho' \xi_1 &= \mathbf{A}_{11} x_1 + \mathbf{A}_{12} x_2 + \mathbf{A}_{13} x_3 + \mathbf{A}_{14} x_4 = \frac{1}{2} \Phi_{x_1} \\
\rho_{/} \xi_1 &= \mathbf{A}_{21} x_1 + \mathbf{A}_{22} x_2 + \mathbf{A}_{23} x_3 + \mathbf{A}_{24} x_4 = \frac{1}{2} \Phi'_{x_2} \\
\rho' \xi_3 &= \mathbf{A}_{31} x_1 + \mathbf{A}_{32} x_2 + \mathbf{A}_{33} x_3 + \mathbf{A}_{34} x_4 = \frac{1}{2} \Phi'_{x_3} \\
\rho' \xi_4 &= \mathbf{A}_{41} x_1 + \mathbf{A}_{42} x_2 + \mathbf{A}_{43} x_3 + \mathbf{A}_{44} x_4 = \frac{1}{2} \Phi'_{x_4}
\end{aligned}\right\} \text{(I)}'$$

essendo $\mathbf{A}_{rs} = \mathbf{A}_{sr}$. Inoltre sarà

$$2\,\varphi(\xi) = \varphi'_{\ 1}\, \xi_1 + \varphi'_{\xi_2} \xi_2 + \varphi'_{\xi_3} \xi_3 + \varphi'_{\xi_4} \xi_4 ;$$

e porremo $\quad (h)$

$$2\,\Phi(x) = x_1 \Phi'_{x_1} + x_2 \Phi'_{x_2} + x_3 \Phi'_{x_3} = x_4 \Phi'_{x_4}$$

cioè con $\Phi(x)$ si denota la forma che si ottiene ponendo nella $\varphi(\xi)$ le $\mathbf{A}_{rs}$ in luogo delle α_{rs} e le x_r invece delle ξ_r $(r = 1, 2, 3, 4)$. Finalmente si ponga:

$$\begin{aligned}
2\varphi(\eta\zeta) = 2\varphi(\zeta\eta) &= \zeta_1 \varphi'_{\eta_1} + \zeta_2 \varphi'_{\eta_2} + \zeta_3 \varphi'_{\eta_3} + \zeta_4 \varphi'_{\eta_4} = \\
&= \eta_1 \varphi'_{\zeta_1} + \eta_2 \varphi'_{\zeta_2} + \eta_3 \varphi'_{\zeta_3} + \eta_4 \varphi'_{\zeta_4} .
\end{aligned}$$

10. Ciò posto, l'equazione quadratica in λ:

$$\varphi(\eta) + 2\lambda\,\varphi(\eta\zeta) + \lambda^2 \varphi(\zeta) = o \qquad (h)'$$

serve a dare i piani dell'inviluppo $\Sigma^{(2)}$ passanti per la retta $\eta\,\zeta$, intersezione dei piani η, ζ di coordinate η_r, ζ_r $(r = 1, 2, 3, 4)$. Dunque l'equazione tangenziale:

$$\varphi(\eta\zeta) = o$$

è quella del *polo Y del piano* η *rispetto a* $\Sigma^{(2)}$;

se η è un piano dell'inviluppo, l'equazione stessa rappresenta *il punto di contatto* di quel piano dell'inviluppo. Le formole (I) ed (I)$'$ servono a rappresentare il *Sistema polare* di $\Sigma^{(2)}$, dandone per ciascun piano le coordinate del polo, e per ciascun polo le coordinate del piano polare. L'equazione

$$\Phi(x) = o$$

rappresenta quindi il luogo dei punti di contatto dei piani dell'inviluppo che è una *quadrica*.

Se di nuovo nelle forme $f(x)$, $\varphi(\xi)$, i coefficienti A_{rs} dell'una sono i reciproci degli elementi del discriminante a formato coi coefficienti a_{rs} dell'altra, le due forme $f(x)$, $\varphi(\xi)$, ossia per le indicazioni usate $f(x)$, $F(\xi)$, si diranno *reciproche* e rappresentano, coll'annullarsi, una superficie di secondo ordine e l'inviluppo dei relativi piani tangenti.

11. Supponiamo ora che il discriminante della $\varphi(\xi)$ si annulli; ossia sia $\alpha = o$, allora le quattro equazioni

$$\varphi'_{\xi_1} = o \quad \varphi'_{\xi_2} = o \quad \varphi'_{\xi_3} = o \quad \varphi'_{\xi_4} = o \qquad (a)$$

coesistano per una stessa terna di valori dei rapporti $\frac{\xi_1}{\xi_4}$, $\frac{\xi_2}{\xi_3}$, $\frac{\xi_3}{\xi_4}$; avremo quindi un piano ω appartenente necessariamente all'inviluppo $\Sigma^{(2)}$ le cui coordinate ω_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ soddisfano adunque alle (a).

L'equazione $(h)'$ ci dice subito:

Per ogni retta del piano ω passano due piani dell' inviluppo coincidenti col piano stesso; ed *ogni piano dell'inviluppo sega il piano fisso* ω *in una retta che appartiene all'inviluppo stesso; perchè tutti i piani passanti per la retta appartengono all'inviluppo.*

Il piano ω dicesi un *piano doppio* dell'inviluppo; chè non è altro adunque che il *sistema delle tangenti di una conica, ciascuna tangente essendo considerata come asse di un fascio di piani, ossia* $\Sigma^{(2)}$ *è il sistema dei piani tangenti di una conica* $C^{(2)}$ del piano ω.

Ogni piano dello spazio ha rispetto a $\Sigma^{(2)}$ il suo polo che rimane sempre il medesimo quando il piano dato ruota intorno alla sua intersezione col piano ω; e quando il piano appartiene all'inviluppo il suo polo giace nel piano stesso sulla retta intersezione con ω. In altri termini il sistema polare di $\Sigma^{(2)}$ non è altro che il *sistema polare* del piano ω relativo alla conica $C^{(3)}$.

12. Assumendo il piano doppio per uno dei piani fondamentali, per esempio, per piano $x_4 = o$, l'equazione dell'inviluppo, si riduce, sul piano $x_4 = o$ a quella *tangenziale* della conica stessa $C^{(2)}$.

Finalmente anche qui si può osservare che la equazione del sistema dei piani tangenti di una conica, possiamo dire l'equazione di una conica, che in un piano ω dello spazio è determinata come inviluppata dai suoi piani tangenti, non è altro che un'equazione omogenea di secondo grado nelle coordinate tangenziali π_{rs}, delle tangenti p intersezioni del piano ω, della conica con un piano tangente di essa; e reciprocamente un'equazione omogenea di secondo grado nelle

π_{rs}, in cui si riguardi fisso, nei binomii π_{rs}, le coordinate di un piano rappresenta nel piano fisso una conica inviluppata dai suoi piani tangenti.

§ 11. Del sistema polare rispetto ad una quadrica generale dello spazio.

1. Tenendo le notazioni già usate precedentemente; siano

$$f(x) = o \quad F(\xi) = o$$

l'equazione di una quadrica $S^{(2)}$ essenzialmente dello spazio, e quella dell'inviluppo dei relativi piani tangenti; supponiamo cioè che il discriminante a di $f(x)$, e quindi anche quello di $F(\xi)$, non sia nullo. Il piano polare del punto Y ha per equazione:

$$2f(xy) = 2_x f(yx) = x_1 f'_{y_1} + x_2 f'_{y_2} + x_3 f'_{y_3} + x_3 f'_{y_4} = o$$

essendo $y_r\,(r = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate di Y; il polo invece di un piano η di coordinate η_r ha per equazione

$$2F(\xi\eta) = 2F(\eta\xi) = \xi_1 F'_{\eta_1} + \xi_2 F'_{\eta_2} + \xi_3 F'_{\eta_3} + \xi_4 F'_{\eta_4} = o.$$

Ciò posto:

Se il piano polare di un punto Y passa per un altro punto Z, viceversa il piano polare di Z passa per Y; ed allora Y, Z si dicono poli *coniugati* od *armonici* rispetto alla quadrica.

Se il polo di un piano η è situato in un altro piano ζ, viceversa il polo di ζ è situato in η; ed allora i piani η, ζ si dicono *armonici* o *coniugati* rispetto alla quadrica.

Le relazioni quindi:

$$\left.\begin{aligned} f(y\,z) = f(z\,y) = o \\ F(\eta\,\zeta) = F(\eta\,\zeta) = o \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

esprimono le condizioni affinchè i punti Y, Z di coordinate y_r, z_r; e i piani η, ζ di coordinate η_r, ζ_r siano coniugati. Due punti della retta YZ, e due punti della retta $\eta\,\zeta$ saranno coniugati, se sia:

$$\left.\begin{aligned} f(y+\lambda\,z,\ y+\lambda'\,z) = f(y+\lambda'\,z,\ y+\lambda\,z) = o \\ F(\eta+\lambda\,\zeta,\ \eta+\lambda'\,\zeta) = F(\eta+\lambda'\,\zeta,\ \eta+\lambda\,\zeta) = o \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

perchè

$$y_r + \mu\,z, \quad \eta_r + \mu\,\zeta \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

sono per ciascun valore di μ rispettivamente le coordinate di un punto di YZ e di un piano della retta $\eta\,\zeta$.

Le relazioni (3) sono lineari e simmetriche nei parametri di λ, λ' dei due punti o dei due piani coniugati dunque:

Le coppie di poli armonici situati sopra una retta sono coppie di punti coniugati di una stessa involuzione i cui elementi doppi sono i punti in cui la retta sega la quadrica.

Le coppie di piani coniugati passanti per una stessa retta sono coppie di piani coniugati di una stessa involuzione i cui elementi doppi sono i piani tangenti alla quadrica condotti per la retta.

2. Possiamo evidentemente concepire in un piano ω infiniti triangoli $A\,B\,C$ i cui vertici siano coppie di poli armonici; e un tal triangolo si dirà coniugato o polare rispetto alla quadrica. Similmente possiamo concepire infiniti triedri $\lambda \mu \upsilon$ che avendo il vertice in un punto P dello spazio hanno le faccie a due a due coniugate rispetto alla quadrica. Tali triedri saranno detti *coniugati* rispetto alla quadrica stessa. Se ora sia D il polo del piano δ e π il piano polare di $P = \lambda \mu \upsilon$ i tetraedri $A B C D$, $\lambda \mu \upsilon \pi$ saranno detti *tetraedri polari* o coniugati rispetto alla quadrica. Essi godono delle seguenti proprietà:

Ogni vertice A o $\lambda \mu \upsilon$ ha per piano polare la faccia opposta $A B C$ o π; e due faccie e due vertici sono elementi coniugati rispetto alla quadrica.

Dei tetraedri polari rispetto ad una data quadrica ne possiamo quindi concepire infiniti.

3. Se vogliamo che i piani fondamentali

$$x_1 = o, \quad x_2 = o, \quad x_3 = o, \quad x_4 = o$$

siano rispettivamente i piani polari dei punti fondamentali

$$\xi_1 = o, \quad \xi_2 = o, \quad \xi_3 = o, \quad \xi_4 = o,$$

se vogliamo, in altri termini, che il tetraedro fondamentale $A_1 A_2 A_3 A_4$ sia un tetraedro coniugato rispetto la quadrica, risulta subito, [per le (I), (II) pag. 117], che l'equazione della quadrica $S^{(2)}$ si riduce alla forma

$$f(x) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4 = o \quad (1)$$

e ponendo in generale:

$$\alpha_{rr} = \frac{1}{a_{rr}} \, (r = 1, 2, 3, 4)$$

sarà

$$F(\xi) = \alpha_{11}\,\xi_1^2 + \alpha_{22}\,\xi_2^2 + \alpha_{33}\,\xi_3^2 + \alpha_{44}\,\xi_4^2 = o \quad (1)'$$

l'equazione dell'inviluppo dei piani tangenti alla quadrica; essendo

$$\rho\,\xi_r = a_{rr}\,x_r \quad \rho'\,x_r = \alpha_{rr}\,\xi_r \quad (r = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

L'equazioni del sistema polare rispetto alla quadrica stessa cioè:

L'equazione di una quadrica dello spazio si può sempre ridurre alla forma semplice (1) *assumendo per tetraedro fondamentale* $A_1 A_2 A_3 A_4$ (vedi § 1) *un tetraedro coniugato alla quadrica.*

4. Possiamo adunque assumere per equazione di una quadrica qualunque dello spazio la (1). Osserviamo poi che se in una corrispondenza reciproca dello spazio esiste un tetraedro Δ tale che ai vertici di esso considerati appartenenti ad una figura Σ corrispondono nella figura reciproca Σ_1 le faccie opposte, allora la corrispondenza reciproca non è altro che un sistema polare rispetto ad una quadrica. Infatti assumendo il tetraedro nominato per tetraedro fondamentale $A_1 A_2 A_3 A_4$, la corrispondenza dovrà essere rappresentata da equazioni della forma (2): dunque, ecc.

Osserviamo poi che in un *Sistema polare*, cioè in una corrispondenza reciproca involutoria la *quadrica direttrice* può non esistere geometricamente, quando appunto i coefficienti a_{rr} $(r = 1, 2, 3, 4)$ dell'equazione (1) che la rappresenta fossero *positivi tutti*. Essendo al solito:

$$f(y) = a_{11}\,y_1^2 + a_{22}\,y_2^2 + \ldots \quad f(z) = a_{11}\,z_1^2 + a_{22}\,z_2 + \ldots$$

ed

$$f(z\,y) = f(y\,z) = a_{11}\, y_1\, z_1 + a_{22}\, y_2\, z_2 + \ldots$$

sarà

$$f(y) + 2\lambda f(y\,z) + \lambda^2 f(z) = o$$

l'equazione quadratica in λ le cui radici dànno i punti comuni alla quadrica $S^{(2)}$ ed alla retta YZ.

La retta stessa YZ sarà tangente alla quadrica quando sia:

$$f(y) f(z) - \overline{f(y\,z)}^2 = o \tag{3}$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} & a_{22}\, a_{33}\, (y_2\, z_3)^2 + a_{33}\, a_{11}\, (y_3\, z_1)^2 + a_{11}\, a_{22}\, (y_1\, z_2)^2 + \\ & + a_{11}\, a_{44}\, (y_1\, z_4)^2 + a_{22}\, a_{44}\, (y_2\, z_4)^2 + a_{33}\, a_{34}\, (y_3\, z_4)^2 = o \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ove si è posto in generale

$$(y_r\, z_s) = y_r z_s - y_s\, z_r.$$

I binomii $(y_r\, z_s)$ non sono altro che le coordinate locali della retta YZ e *l'equazione* (4) *rappresenta il cono quadrico* $Y^{(2)}$ *formato dalle tangenti condotte da* Y *alla quadrica, se in essa si riguardano costanti le* y_r, *coordinate del punto* Y*; in vece l'equazione stessa* (4) *rappresenta l'insieme delle tangenti alla quadrica, se* Y, Z *sono variabili ossia se si riguardano* $(y_r\, z_s)$ le *coordinate locali di una retta, atte a soddisfare all'equazione stessa.*

Il cono $Y^{(2)}$ non è altro che quello che proietta da Y la conica $C^{(2)}$ secondo cui il piano η, polare di Y, dato dall'equazione

$$f(y\,x) = o,$$

ossia dalla

$$a_{11} y_1 x_1 + a_{22} y_2 x_2 + a_{33} y_3 x_3 + a_{44} y_4 x_4 = o,$$

taglia la quadrica stessa. Ed infatti poi la (4), ossia la (3), è soddisfatta dalle coordinate dei punti della conica rappresentata dalla

$$f(x) = o \quad f(y\, x) = o. \qquad (h)$$

5. Essendo x_r le coordinate di un punto corrente del cono quadrico $Y^{(2)}$ e Z quelle di un punto fisso nello spazio, allora l'equazione:

$$\left.\begin{aligned} a_{22}\, a_{33}\, (y_2\, z_3)\, (y_2\, x_3) + a_{33}\, a_{11}\, (y_3\, z_1)\, (y_3\, x_1) + \\ + a_{11}\, a_{22}\, (y_1\, z_2)\, (y_1\, x_2) + a_{11}\, a_{44}\, (y_1\, z_4)\, (y_1\, x_4) + \\ + a_{22}\, a_{44}\, (y_2\, z_4)\, (y_2\, x_4) + a_{33}\, a_{44}\, (y_3\, z_4)\, (y_3\, x_4) = o \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

rappresenta il piano polare del raggio $YZ = r$ rispetto al cono quadrico $Y^{(2)}$. Se X è un punto del piano polare stesso, il piano polare del raggio YX è dato dall'equazione stessa in cui si riguardano variabili le z_r. I raggi

$$YZ = r \quad YX = r'$$

sono tali adunque che l'uno passa per il piano polare dell'altro, e sono perciò raggi armonici o coniugati rispetto al cono $Y^{(2)}$. Se poi fosse Z un punto del cono allora la (5) rappresenta il piano tangente al cono lungo la generatrice YZ. Nei punti della conica $C^{(2)}$ comune al cono ed alla quadrica $S^{(2)}$, le due superficie stesse $Y^{(2)}$, $S^{(2)}$ hanno gli stessi piani tangenti, ed in ciascun punto M di $C^{(2)}$ il piano tangente ad $Y^{(2)}$, ad $S^{(2)}$ è dato appunto dalle stesse due rette, che sono la generatrice del cono $Y^{(2)}$ (tangente di $S^{(2)}$) passante per M, e la tangente in M a $C^{(2)}$. Gli è perciò che il cono $Y^{(2)}$ si dice il *Cono circoscritto* o *tangente* alla *quadrica lungo la conica $C^{(2)}$ di essa.* Ogni punto Y dello spazio è vertice di un determinato cono circoscritto; e quando il punto Y è un punto della quadrica allora per la (3) il cono degenera in due piani coincidenti nel piano tangente in quel punto alla quadrica stessa $S^{(2)}$.

6. Correlativamente l'equazione:

$$F(\eta)\,F(\zeta) - \overline{F(\eta\,\zeta)}^2 = o \qquad (3)'$$

ossia la:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{22}\,\alpha_{33}\,(\eta_2\,\zeta_3)^2 + \alpha_{33}\,\alpha_{11}\,(\eta_3\,\zeta_1)^2 + \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,(\eta_1\,\zeta_2)^2 + \\ &+ \alpha_{11}\,\alpha_{44}\,(\eta_1\,\zeta_4)^2 + \alpha_{22}\,\alpha_{44}\,(\eta_2\,\zeta_4)^2 + \alpha_{33}\,\alpha_{44}\,(\eta_3\,\zeta_4)^2 = o, \end{aligned}\right\} (4)'$$

ove si è posto in generale:

$$(\eta_r\,\zeta_s) = \eta_r\,\zeta_s - \eta_s\,\zeta_r,$$

rappresenterà o il *Sistema di tutte le rette per ciascuna delle quali passano due piani tangenti coincidenti della quadrica $S^{(2)}$; quando nell'equazione stessa si considerano i piani η, ζ variabili ossia π_{rs} sono le coordinate tangenziali, di una retta dello spazio; oppure rappresenta l'inviluppo di seconda classe formato dalle rette stesse situate in un piano dato quando in essa equazione si considerano fisse le coordinate η_r di uno η dei due piani η, ζ.*

Le rette dello spazio tangenti alla quadrica $S^{(2)}$ o le rette dello spazio per ciascuna delle quali passano due piani tangenti coincidenti, formano una stessa serie $\Theta^{(2)}$ tre volte infinita di rette, che dicesi *Complesso del secondo grado*.

Infatti poi per una retta tangente ad $S^{(2)}$ passano due piani tangenti consecutivi, quelli che toccano la quadrica nei punti infinitamente vicini comuni alla tangente ed alla quadrica stessa; oppure anche basta osservare che, per le relazioni, fra le coordinate locali e tangenziali di una stessa (vedi pag. 40), e le relazioni fra i coefficienti a_{rr}, α_{rr}, l'equazioni (4), (4)$'$ rappresentano una stessa serie di rette le quali nella (1) sono determinate colle loro coordinate locali, nella (2) colle tangenziali.

La serie $\Theta^{(2)}$ si dice un *Complesso di rette*, perchè è dunque l'insieme delle rette che soddisfano ad una relazione fra le coordinate delle rette stesse; si dice poi del *secondo grado* perchè *le rette del complesso che passano per un punto Y vi formano un cono $Y^{(2)}$ di secondo grado; il cono circoscritto alla quadrica $S^{(2)}$, avente il vertice nel punto preso Y; quelle rette del complesso che si trovano in un piano η vi formano un inviluppo $\eta^{(2)}$ di seconda classe quello cioè delle tangenti alla conica secondo cui il piano μ sega la quadrica. Nel caso particolare che Y sia un punto della quadrica $S^{(2)}$, il cono del complesso degenera in due piani coincidenti col piano tangente in Y alla quadrica; e se η è un piano tangente alla quadrica l'inviluppo del Complesso giacente in quel piano degenera in due punti coincidenti nel punto di contatto di quel piano η colla quadrica.*

7. Se ζ è un piano fisso di coordinate ζ_r (r =

1, 2, 3, 4) ed ξ hn piano variabile di coordinata ξ_r, l'equazione:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha_{22}\,\alpha_{33}\,(\eta_2\,\zeta_3)\,(\eta_2\,\xi_3) + \alpha_{33}\,\alpha_{11}\,(\eta_3\,\zeta_1)\,(\eta_3\,\xi_1) + \\ + \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,(\eta_1\,\zeta_2)\,(\eta_1\,\xi_2) + \alpha_{11}\,\alpha_{44}\,(\eta_1\,\zeta_4)\,(\eta_1\,\xi_4) + \\ + \alpha_{22}\,\alpha_{44}\,(\eta_2\,\zeta_4)\,(\eta_2\,\xi_4) + \alpha_{33}\,\alpha_{44}\,(\eta_3\,\zeta_4)\,(\eta_3\,\xi_4) = o\end{array}\right\}(5)'$$

rappresenterà il polo Y della retta $\eta\,\zeta = r$ rispetto alla conica $C^{(2)}$ rappresentata dall'equazioni:

$$F(\xi) = o\,, \quad F(\eta\,\xi) = o\,;$$

ossia rispetto alla conica secondo cui il piano η sega la quadrica $S^{(2)}$. L'equazione stessa è anche quella che rappresenta il polo della retta $\eta\,\xi = r'$ secondo cui un piano ξ passante per Y sega il piano η, quando in essa si riguardano costanti le ξ_r e variabili le ζ_r. Le rette r, r' sono rette coniugate rispetto a $C^{(2)}$ perchè l'una contiene il polo dell'altra: quindi la (5)$'$ esprime adunque la relazione che deve aver luogo fra le coordinate tangenziali $(\eta_r\,\zeta_s)$, $(\eta_r\,\xi_s)$ di due rette coniugate rispetto alla conica $C^{(2)}$ del piano η.

8. Se il punto X percorre una retta r il piano ξ polare di X ruota intorno ad un'altra retta r' che è la *polare reciproca* della prima rispetto alla quadrica $S^{(2)}$. Se Y, Z sono due punti di r, al solito di coordinate

$$y_r,\, z_r\, (r = 1, 2, 3, 4),$$

allora i piani polari dei punti Y, Z avranno per equazioni:

$$a_{11}\,y_1\,x_1 + a_{22}\,y_2\,x_2 + a_{33}\,y_3\,x_3 + a_{44}\,y_4\,x_4 = o$$
$$a_{11}\,z_1\,x_1 + a_{22}\,z_2\,x_2 + a_{33}\,z_3\,x_2 + a_{44}\,z_3\,x_4 = o$$

e chiamando con x_{rs} le *coordinate locali* delle retta r, essendo cioè:

$$x_{23} = (y_2\, z_3) \quad x_{31} = (y_3\, z_1) \quad x_{12} = (y_1\, z_2)$$

$$x_{14} = (y_1\, z_4) \quad x_{24} = (y_2\, z_4) \quad x_{34} = (y_3\, z_4)$$

ed inoltre dicendo

$$\xi_{rs}\ (r\, s = 23, 31, 12, 14, 24, 34)$$

le coordinate tangenziali della polare r' di r, si avrà:

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_{23} = a_{22}\, a_{33}\, x_{23} & \xi_{31} = a_{33}\, a_{11}\, x_{31} & \xi_{12} = a_{11}\, a_{22}\, x_{12} \\ \xi_{14} = a_{11}\, a_{44}\, x_{14} & \xi_{24} = a_{22}\, a_{44}\, x_{24} & \xi_{34} = a_{33}\, a_{44}\, x_{34} \end{array}\right\} \text{(I)}$$

relazioni che servono adunque a determinare le coordinate della retta r' polare di una data r.

9. Ciò posto, se il piano polare di un punto Y di r passa per una retta q, allora la polare r' di r taglia la q; viceversa se la polare r' di r taglia la q allora esiste su r un punto il cui piano polare passa per q; perchè il polo del piano $r'\,q$ giace appunto su r. Inoltre le rette r, q hanno fra loro le stesse proprietà, cioè viceversa esiste un punto su q il cui piano polare pàssa per r. Ed infatti la retta polare q' di q sega la r; ed il piano $r\,q'$ ha il suo polo sopra q. Le due rette r, q si dicono *coniugate* cioè sono coniugate due rette r, q di cui la polare dell'una sega l'altra. Se indichiamo quindi con t_r, υ_r le coordinate di due punti T, V della retta q saranno $p_{rs} = (t_r\, \upsilon_s)$ le coordinate locali della retta stessa e per le formole date, a pag. 40, esprimente la condizione perchè due rette siano in un piano, si avrà:

$$\left.\begin{aligned}&a_{22}\,a_{33}\,(y_2\,z_3)\,(t_2\,v_3)+a_{33}\,a_{11}\,(y_3\,z_1)\,(t_3\,v_1)+\\+&\,a_{11}\,a_{22}\,(y_1\,z_2)\,(t_1\,v_2)+a_{11}\,a_{44}\,(y_1\,z_4)\,(t_1\,v_4)+\\+&\,a_{22}\,a_{44}\,(y_2\,z_4)\,(t_2\,v_4)+a_{33}\,a_{44}\,(y_3\,z_4)\,(t_3\,v_4)=o,\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

per relazione che lega le coordinate locali di due rette coniugate rispetto alla quadrica. La stessa relazione si otterrebbe, in coordinate tangenziali, considerando le rette r, q, determinate ciascuna da due piani; cambiando nelle (II) le a_{rr} nelle α_{rr} $(r=1, 2, 3, 4)$.

Pertanto avuto riguardo alle (4) e (4)′ risulta, ciò che del resto si poteva dedurre anche col puro ragionamento:

Due raggi coniugati rispetto al cono $Y^{(2)}$ di vertice Y circoscritto alla quadrica sono due rette coniugate rispetto alla quadrica $S^{(2)}$.

Due rette coniugate rispetto alla conica $C^{(2)}$ sezione di un piano η colla quadrica sono anche rette coniugate rispetto alla quadrica.

10. Diciamo ora *coniugati fra loro rispetto alla quadrica* una retta r ed un piano ω se il polo O di ω giace sulla retta r, o ciò che è lo stesso, se la polare r' di r giace su ω; e correlativamente diciamo *coniugati fra loro rispetto alla quadrica $S^{(2)}$* un punto X ed una retta r se il piano polare di X passa per r; o, ciò che è lo stesso, se la retta polare r' di r passa per X. Da queste definizioni risulta intanto che: un raggio ed il suo piano polare rispetto al cono $Y^{(2)}$ di vertice Y circoscritto alla quadrica sono elementi coniugati rispetto alla quadrica $S^{(2)}$ e correlativamente un punto è la sua retta polare rispetto alla conica $C^{(2)}$ secondo cui un piano η sega la quadrica sono pure elementi coniugati di essa: dunque

I piani e le rette fra loro coniugati rispetto alla quadrica uscenti da uno stesso punto Y dello spazio formano il sistema polare del cono $Y^{(2)}$ circoscritto alla quadrica avente per vertice Y.

Un triedro polare del cono $Y^{(2)}$ è un triedro polare o coniugato rispetto alla quadrica.

I punti e le rette di un piano η che sono elementi fra loro coniugati rispetto ad una quadrica formano il Sistema polare della conica $C^{(2)}$ secondo cui il piano η sega la quadrica stessa $S^{(2)}$. Ogni triangolo polare della conica $C^{(2)}$ è un triangolo polare o coniugato rispetto alla quadrica.

Ed inoltre:

Data uno quadrica generale $S^{(2)}$ dello spazio; ogni punto Y dello spazio è vertice di un triedro trirettangolo polare o coniugato rispetto alla quadrica.

Colle definizioni date si può poi osservare che: *In un Tetraedro polare rispetto alla quadrica due Spigoli opposti sono due rette polari reciproche: due spigoli qualisivogliano sono rette coniugate.*

§ 12. Classificazione delle Quadriche dello spazio.

1. Abbiamo visto che una quadrica qualunque $S^{(2)}$ è sempre generata da due stelle reciproche S, S' che hanno i centri S, S' in due punti della quadrica stessa.

Intanto il piano δ che nella stella S è il corrispondente del raggio SS'' di S' è il piano tangente in S alla quadrica; e similmente il piano δ' della stella S' che corrisponde al raggio SS' della stella S è il piano tangente in S' alla quadrica stessa $S^{(2)}$. Infatti ai raggi del piano δ passanti per S corrispondono nella stella S' piani passanti per SS' dunque in S coincidono le due intersezioni di ognuno di quei raggi colla quadrica. Dunque senz'altro δ, δ' sono i piani tangenti alla quadrica $S^{(2)}$ nei punti S, S' rispettivamente; perchè quei piani contengono le tangenti ad essa nei punti S, S'. Inoltre al fascio S di raggi del piano δ corrisponderà nella stella S' un fascio di piani proiettivo al fascio di raggi, quindi il fascio di piani sarà tagliato dal piano δ in un fascio S di raggi proiettivo e sovrapposto a quello delle tangenti in S alla quadrica. Ora i due fasci proiettivi potranno avere

a) *Due raggi uniti distinti.*

b) *Due raggi uniti coincidenti.*

c) *Non potranno avere alcun raggio unito; o come si suol dire per definizione potranno avere due raggi uniti immaginarii.*

Nel caso *a)* diremo che il punto S è un punto *iperbolico;* nel caso *b)* un punto *parabolico;* nel caso *c)* un punto *elittico* della quadrica.

Nel caso *a)* il piano tangente in S sega dunque la quadrica in due rette distinte, nel caso *b)* le sega in due rette coincidenti.

2. Dico ora *che se un punto S di una quadrica è elittico o iperbolico o parabolico lo stesso accade di tutti gli altri punti della quadrica.* Infatti osserviamo anzitutto che se e è un raggio unito dei due fasci proiettivi sovrapposti ora nominati, il raggio e sarà una retta della quadrica; poichè il piano della stella S' corrispondente al raggio e della stella S passa per e. Ora ad ogni raggio e della stella S appartenente alla quadrica corrisponde un raggio e' della stella S' pure appartenente alla quadrica. Infatti il piano del raggio e e della retta SS' taglia il piano δ' in una retta e' della stella S'. Ora al raggio e' di S' dovrà corrispondere un piano che deve passare per SS' e per e; dunque il piano in discorso sarà quello del raggio e' della retta SS': cioè e' sarà una retta della quadrica passante per S'. Riassumendo adunque resta dimostrato quanto si voleva.

Possiamo anche osservare che le quadriche a punti parabolici sono essenzialmente i coni quadrici; perchè delle quadriche che contengano rette reali non ve ne possono essere che di due specie: di quelle luogo delle rette che tagliano tre rette son poste a due a due nello stesso piano; oppure i coni quadrici, i punti dei quali sono evidentemente per la data definizione *punti* *parabolici.* Infatti se g è una retta appartenente ad una quadrica $S^{(2)}$ un piano condotto arbitrariamente per g segherà la quadrica necessariamente in un'altra retta d. Rotando il piano intorno a g verremo a generare la quadrica come luogo di rette d_1, d_2, d_3 ... che si appoggiano alla g. Ora se due qualunque delle rette d_1, d_2... non sono in un piano, allora la quadrica è il luogo delle rette g che tagliano tre qualunque delle rette d; perchè ciascuna retta che tagli tre rette d taglierà tutte le altre dovendo appartenere alla quadrica.

Se poi due delle rette, per esempio, d_1, d_2 d_1, d_2, d_3 ... si tagliassero, dovrebbero necessariamente tagliarsi in un punto V di g, le tre rette g, d_1, d_2 costituendo così un *triedro* V inscritto alla quadrica; la quale è un cono di vertice V; perchè per due punti A, B della quadrica non situati su g, d_1, d_2 conducendo due piani a tagliarla in due coniche; queste sono proiettate da V secondo lo stesso cono quadrico che è la quadrica stessa considerata.

Dunque le *quadriche dello Spazio, che* noi ora vogliamo classificare, *sono o a punti iperbolici* oppure *a punti elittici.*

3. Ciò posto immaginiamo un sistema di coordinate cartesiane qualisivogliano e supponiamo che sia ancora

$$f(x) = o$$

l'equazione di una quadrica qualunque, ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

ed essendo x, y, z le coordinate di un punto corrente X della quadrica. Diremo che le x_r ($r = 1, 2, 3, 4$) sono le *coordinate omogenee cartesiane del punto* X e possiamo trattarle come le coordinate omogenee proiettive generali. Così se y_r, z_r sono le coordinate omogenee cartesiane di due punti Y, Z di una retta $r = YZ$ saranno $y_r + \lambda z_r$ ($r = 1, 2, 3, 4$) le coordinate omogenee cartesiane di un punto della retta, per ogni valore attribuito a λ, sicchè, tenendo le usate notazioni, sarà

$$x_1 f'_{y_1} + x_2 f'_{y_2} + x_3 f'_{y_3} + x_4 f'_{y_4} = o,$$

l'equazione del piano polare del punto Y rispetto alla quadrica, giacchè sarà ancora

$$f(y) + 2\lambda f(y\, z) + \lambda^2 f(z) = o,$$

l'equazione quadratica in λ che dà le intersezioni di una retta $r = YZ$ colla quadrica $S^{(2)}$.

Dall'equazione in coordinate omogenee cartesiane si passa all'equazione in coordinate non omogenee ponendovi

$$x_4 = 1, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Osserviamo inoltre che l'equazione

$$x_4 = o$$

rappresenta, nel nostro caso, il *piano all'infinito*.

4. L'equazioni:

$$x = r\, z + \rho \qquad y = s\, z + \delta \tag{1}$$

rappresentano una retta arbitraria r dello Spazio, determinata come intersezione dei piani che la proiettano sui piani xz, yz. Quindi una retta dello spazio è determinata, come abbiamo già avvertito, da quattro numeri r, s, ρ, δ. Sostituendo all'equazione della quadrica in coordinate cartesiane x, y, z di un suo punto in luogo di x, y i valori (1) avremo un' equazione quadratica in z, cioè della forma:

$$\mathbf{A}\, z^2 + \mathbf{B}\, z + \mathbf{C} = o$$

ove $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sono polinomii del secondo grado nelle r, s, ρ, δ. Quindi l'equazioni:

$$\mathbf{A} = o, \quad \mathbf{B} = o, \quad \mathbf{C} = o \qquad (a)$$

possono essere soddisfatte da infiniti sistemi di valori *reali* o *complessi* delle r, s, ρ, δ. Definendo *retta immaginaria* un sistema di quattro parametri r, s, ρ, δ dei quali tutti o in parte siano numeri complessi, ed avuto riguardo a quanto abbiamo detto precedentemente ed all' equazioni quadratiche (a) nei parametri r, s, ρ, δ di una retta, risulta:

Ogni quadrica contiene un' infinità di rette REALI *ed immaginarie. Una quadrica esclusivamente appartenente allo Spazio, una quadrica cioè che non sia un cono, contiene sempre due serie di rette reali od immaginarie.*

Ed invero poi l'equazione di una quadrica esclusivamente appartenente allo spazio, può in coordinate omogenee essere sempre posta sotto la forma (vedi pag. 132)

$$f(x) = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + a_{44}\, x_4^2 = o. \quad (6)$$

Indicando quindi con r, s, t, u una permutazione qualunque degli indici 1, 2, 3, 4, si avrà

$$f(x) = (x_r\sqrt{a_{rr}} + x_s i\sqrt{a_{ss}})(x_r\sqrt{a_{rr}} - x_s i\sqrt{a_{ss}}) +$$
$$+ (x_t\sqrt{a_{tt}} + x_u i\sqrt{a_{uu}})(x_t\sqrt{a_{tt}} - x_u i\sqrt{a_{uu}}) = o,$$

onde la quadrica è sempre il prodotto dei due fasci proiettivi di piani rappresentati dall'equazioni:

$$x_r\sqrt{a_{rr}} + x_s i\sqrt{a_{ss}} + \lambda(x_t\sqrt{a_{tt}} + x_u i\sqrt{a_{uu}}) = o$$
$$x_t\sqrt{a_{tt}} - x_u i\sqrt{a_{uu}} - \lambda(x_r\sqrt{a_{rr}} - x_s i\sqrt{a_{ss}}) = o$$

al variare di λ oppure dei due rappresentati dalle:

$$x_r\sqrt{a_{rr}} + x_s i\sqrt{a_{ss}} + \lambda(x_t\sqrt{a_{tt}} - x_u i\sqrt{a_{uu}}) = o$$
$$x_t\sqrt{a_{tt}} + x_u i\sqrt{a_{uu}} - \lambda(x_r\sqrt{a_{rr}} - x_s i\sqrt{a_{ss}}) = o$$

ove sia

$$i = \sqrt{-1}.$$

Si può verificare che i due sistemi di generatrici reali o immaginarie che così si ottengono hanno le proprietà già date per il caso che i fasci proiettivi di *piani siano reali;* cioè *due generatrici di uno stesso sistema non si tagliano: due generatrici di sistemi differenti si tagliano in un punto reale della quadrica.*

Quando di quattro coefficienti a_{rr} di $f(x)$ sono quantità positive, la quadrica è essenzialmente *immaginaria* e viene geometricamente definita dal *suo sistema polare;* se dei quattro coefficienti a_{rr} uno è di segno opposto agli altri tre; la quadrica è *a rette immaginarie;* se finalmente due coefficienti a_{rr} hanno segno opposto ai due rimanenti, allora la quadrica è a rette *reali*.

5. Ciò posto riprendiamo l'equazione (1) della quadrica in coordinate cartesiane omogenee; e tenendo le gia usate notazioni sarà:

$$x_1 f'y_1 + x_2 f'y_2 + x_3 f'y_3 + x_4 f'y_4 = o,$$

l'equazione del piano polare del punto Y di coordinate cartesiane omogenee x_{y_r} $(r = 1, 2, 3, 4)$. Volendo, come abbiamo detto, studiare le quadriche appartenenti allo spazio supporremo che il discriminante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{44} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero. Essendo t, u, v le coordinate Plucheriane di un piano e ponendo $t = \frac{\xi_1}{\xi_4}$, $u = \frac{\xi_2}{\xi_4}$, $v = \frac{\xi_3}{\xi_4}$ allora le ξ_r saranno dette le coordinate omogenee Plucheriane del piano ξ; e si possono trattare come le coordinate omogenee generali. Essendo al solito A_{rs} l'elemento reciproco α_{rs} nel discriminante a, e quindi $A_{rs} = A_{sr}$, le formole

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\xi_r + a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 + a_{r4}x_4 \\ \rho\,x_r = A_{d1}\xi_1 + A_{r2}\xi_2 + A_{r3}\xi_3 + A_{s4}\xi_4 \end{aligned}\right\} r = 1, 2, 3, 4 \quad (c)$$

servono rispettivamente a determinare le coordinate del piano polare di un punto dato, e le coordinate del polo di un piano dato. Inoltre la equazione della quadrica la potremo indicare con

$$f(x) = \Sigma\, a_{rs}\, x_r\, x_s \left({}^r_s = 1, 2, 3, 4\right) \qquad (d)$$

ed

$$a_{rs} = a_{sr}$$

e quella dell'inviluppo dei suoi piani tangenti sarà

$$F(\xi) = \Sigma\, A_{rs}\, \xi_r\, \xi_s \left({}^r_s = 1, 2, 3, 4\right) \qquad (e)$$

ed

$$A_{rs} = A_{sr},$$

ove il simbolo Σ indica l'operazione della somma.

6. Le quadriche dello spazio si possono classificare rapporto alla loro sezione col piano all'infinito, che naturalmente ne determina in certo modo la forma. Intanto il piano all'infinito può essere tangente o no alla quadrica. Se non è tangente alla quadrica allora avrà il suo polo O che sarà un punto il finito necessariamente non situato sulla quadrica, e le cui coordinate cartesiane x_o, y_o, z_o sono date dalle formole

$$x_o = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y_o = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z_o = \frac{A_{34}}{A_{44}}$$

e sono le soluzioni comuni dell'equazioni di primo grado:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + a_{14} = o \\ f'_y &= a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z + a_{24} = o \\ f'_z &= a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z + a_{34} = o \end{aligned}\right\} (f')$$

le quali dànno certamente valori determinati e finiti per le x, y, z, poichè deve essere necessariamente il determinante

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

differente da zero. Perchè se fosse $A_{44} = o$ allora per la (e) il piano all'infinito sarebbe tangente alla superficie, perchè la (e) sarebbe soddisfatta delle coordinate $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = o$ di quel piano.

Nel caso adunque di A_{44} diverso da zero esiste un punto O, al finito che è il polo del piano all'infinito, che diremo CENTRO della superficie. Ogni *corda* AB della superficie passante pel centro è divisa per metà dal centro stesso. Infatti il centro deve essere il coniugato armonico del punto all'infinito della retta AB rispetto agli estremi AB della corda. Questa proprietà si può anche vedere trasportando gli assi parallelamente a sè stessi e nella propria direzione ad avere la origine O_1 nel centro O_1 della quadrica. Avuto riguardo alla *(f)* essendo

$$x = x_0 + x' \quad y = y_0 + y' \quad z = z_0 + z'$$

le formole di trasformazione, l'equazione della quadrica si pone sotto la forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \Delta = o \end{array}\right\} (h)$$

ove si sono ommessi gli accenti alle nuove coordinate x, y, z di un punto corrente della quadrica. L'equazione, ove Δ è una costante, è appunto soddisfatta dal punto di coordinate $-x$, $-y$, $-z$ quando lo sia dal punto di coordinate x, y, z.

8. Ogni retta ed ogni piano condotti pel centro dicesi un *diametro* ed un piano diametrale della quadrica. Ogni diametro ha la sua polare all'infinito; ed ogni piano diametrale il suo polo all'infinito. Ogni diametro ha il suo piano diametrale *coniugato* contenente la polare del diametro. Quindi i piani paralleli ad un piano diametrale hanno i loro poli sul diametro coniugato al piano diametrale stesso e sono coniugati essi pure a quel diametro. Un piano diametrale sega la quadrica in una conica che ha per centro il centro stesso O_1 della quadrica. Ogni piano ω parallelo a quel piano diametrale sega la quadrica secondo una conica che ha il centro nel punto ove il piano ω sega il diametro d coniugato al piano diametrale δ considerato; perchè il piano polare del punto $\omega\, d$ ò parallelo al piano diametrale δ; epperò rispetto alla conica sezione $\omega\, d$ ha per polare la retta all'infinito del piano. Di più le coniche $C^{(2)}$, $C'^{(2)}$, $C''^{(2)}$ .... sezioni della quadrica col piano diametrale δ e coi piani δ', δ''... ad esso paralleli sono *coniche simili* cioè hanno gli stessi punti all'infinito. Ed invero sulla retta all'infinito del piano diametrale δ, che è anche la retta all'infinito di δ', δ''..., resta determinata un' involuzione di coppie di poli armonici rispetto alla quadrica; questa involuzione viene proiettata rispettivamente dai centri O_1, O_2, O_3, delle coniche $C^{(2)}$, $C'^{(2)}$, $C''^{(2)}$ nella involuzione di diametri coniugati rispetto alle coniche stesse; le quali saranno quindi o tutte *Ellissi* o tutte *Iperbole* secondo l'involuzione delle coppie di poli armonici rispetto alla quadrica è positiva o negativa. Non possono essere mai parabole perchè se il piano diametrale δ è tangente alla quadrica allora segherà la quadrica nel sistema di due rette reali o immaginarie, ed i piani δ', δ''... paralleli a δ segheranno la quadrica in altrettanti Ellissi od Iperbole.

9. Supponiamo ora che sia $A_{44} = o$; allora i piani rappresentati dall'equazioni (f) sono paralleli ad una stessa retta r le cui equazioni, immaginando la condotta per l'origine, sono:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a_{12}\,a_{23} - a_{22}\,a_{13}} = \\ &= \frac{y}{a_{13}\,a_{21} - a_{11}\,a_{23}} = \\ &= \frac{z}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Essendo infatti α_{rs} l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante A_{44}, l'equazioni precedenti diverranno:

$$\frac{x}{\alpha_{31}} = \frac{y}{\alpha_{32}} = \frac{z}{\alpha_{33}}\,;$$

ed essendo per ipotesi $A_{44} = o$, sarà

$$\alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33}\,,$$

cioè i tre piani rappresentati dalle *(f)* si segano a due a due in rette fra loro parallele e parallele alla (1). D'altra parte queste rette si dirigono al polo del piano all'infinito; che essendo tangente alla quadrica ha per polo il relativo punto di contatto. Tutte le rette parallele alla (1) che si dirigono al punto di contatto della superficie col piano all'infinito si diranno anche in questo caso *diametri*. Ogni diametro d segando la superficie in un punto all'infinito la segherà in un altro V al finito. Il piano δ tangente in V alla quadrica e tutti i piani δ', δ'' paralleli a δ sono *coniugati* al diametro d della superficie passante per V. Il piano tangente in V segherà la quadrica nel sistema di due rette reali o immaginarie secondo che essa sarà a punti iperbolici od ellittici.

Quindi come precedentemente, essendo la polare di un diametro la retta all'infinito di ogni piano coniugato al diametro stesso, ne segue che le sezioni colla quadrica fatte dai piani δ', δ'' ... paralleli al piano tangente in V saranno o tutte *iperboli* o tutte *ellissi* aventi il loro centro sul diametro stesso d coniugato ai piani paralleli stessi δ', δ'' ...; *e le sezioni poi fatte con piani paralleli ai diametri saranno sempre parabole.*

Pertanto le quadriche dello spazio si possono classificare in

a) Quadriche dotate di CENTRO, ossia quadriche tagliate dal piano all'infinito;

b) Quadriche non dotate di centro, ossia quadriche toccate dal piano all'infinito.

Veniamo ora a dichiarare più precisamente la forma delle quadriche appartenenti a ciascuna delle due classi.

§ 13. Quadriche dotate e non dotate di centro. — Elissoide. — Sfera. — Iperbolide ad una falda. — Iperbolide a due falde. — Paraboloide ellittico e gobbo.

1. L'equazione di una quadrica qualunque riferita a tre assi coordinati che hanno l'origine nel centro della quadrica è: (vedi pag. 150)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = -\Delta.$$

Si vede subito per le formole a pag. 148, che il piano diametrale coniugato al diametro d rappresentato dall'equazioni:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

è quello è dato dall'equazione:

$$x(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c) + y(a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c) + \\ + (a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c) = o,$$

essendo al solito $a_{rs} = a_{sr}$.

I diametri e i piani diametrali coniugati formano un sistema polare nella stella O avente il vertice nell'origine; di cui il *cono direttore* cioè il cono luogo dei raggi contenuti nei loro piani polari è dato quindi dall'equazione

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = o. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ed è appunto il cono che proietta la conica secondo cui il piano all'infinito sega la quadrica.

2. Segue da ciò che se il sistema polare della stella O è quello dei piani e delle rette fra loro perpendicolari allora l'equazione della quadrica si ridurrà alla forma

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2+ \\ +2\,y\,z\cos\lambda+2\,z\,x\cos\mu+2\,x\,y\cos\nu=K \end{array}\right\} \quad (1)$$

indicando, al solito, con λ, μ, ν gli angoli $(y\,z)$, $(z\,x)$, $(x\,y)$ degli assi.

Se K è positivo *l'equazione* (1) *rappresenta adunque in tal caso una sfera di raggio* $\sqrt{K}$ *avente il centro nell' origine.*

3. Se gli assi sono ortogonali e siano a, b, c le coordinate del centro della sfera ed r, il raggio di essa; sarà:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \qquad (1)$$

L'equazione della sfera stessa, essendone x, y, z le coordinate di un suo punto corrente. Sviluppando, l'equazione diventa:

$$\begin{gathered} x^2+y^2+z^2-2\,a\,x-2\,b\,y-2\,c\,z+ \\ +(a^2+b^2+c^2-r^2)=o \end{gathered}$$

Viceversa se l'equazione di una quadrica, riferita ad assi ortogonali, è della forma:

$$x^2+y^2+z^2+A\,x+B\,y+C\,z+D=o \qquad (3)$$

la quadrica, se esiste, è una sfera.

Infatti l'equazioni:

$$-2\,a=A \quad -2\,b=B \quad -2\,c=C$$

servono a dare le coordinate a, b, c del centro;

e si ha:

$$a = -\frac{A}{2} \quad b = -\frac{B}{2} \quad c = -\frac{C}{2}.$$

Quindi il raggio r sarà dato da

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - r^2 = D$$

onde

$$r^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D;$$

quindi secondo che la differenza

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D$$

è positiva o negativa l'equazione (3) rappresenterà una sfera oppure definirà semplicemente un sistema polare della stella che ha il centro nel punto di coordinate a, b, c

4. Sia V un punto qualunque dello spazio di coordinate l, m, n. Allora l'espressione

$$\mathbf{P} = (l - a) + (m - b) + (n - c) - r^2$$

non è altro che il prodotto dei segmenti intercetti dal punto V e dalla sfera sopra una retta arbitrariamente condotta per V.

Infatti se siano α, β, γ le inclinazioni cogli assi di una retta r qualunque condotta per il punto V, saranno

$$x = l + \rho \cos \alpha$$
$$y = m + \rho \cos \beta$$
$$z = n + \rho \cos \gamma$$

le coordinate di un punto qualunque M della retta r, ove ρ rappresenta la distanza MV. Segue da ciò che l'equazione quadratica in ρ:

$$\rho^2 + 2\rho\{(l-a)\cos\alpha + (m-b)\cos\beta + (n-c)\cos\gamma\} + \\ + (l-a)^2 + (m-b)^2 + (n-c)^2 - r^2 = o,$$

dà i segmenti ρ, ρ' domandati; e quindi si ha:

$$\mathsf{P} = \rho\,\rho' = (l-a)^2 + (m-b)^2 + (n-c)^2 - r^2.$$

Abbiamo così un noto teorema di geometria elementare sulla sfera che cioè:

Il prodotto dei segmenti ρ, ρ' considerati è costante qualunque sia la retta condotta per V. Il valore P di tal prodotto si dice la *potenza* del punto P rispetto alla sfera.

L'espressione quindi:

$$p = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \qquad (3)$$

non è altro che la potenza dell'origine. L'equazione della sfera si può porre sotto la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + p = o, \quad (\mathrm{I})$$

d'onde risulta che una sfera è determinata quando siano date le coordinate del centro e la potenza p rispetto all'origine. Risulta poi anche che

Una superficie sferica è determinata da quattro dei suoi punti.

La Geometria elementare insegna appunto il modo di costruire il centro della sfera coi dati supposti.

Finalmente osserviamo che l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = o$$

è quella del cono direttore del sistema polare formato da rette e dai piani passanti per l'origine e paralleli ai diametri e piani diametrali coniugati della sfera. In altri termini il cono in discorso viene tagliato dal piano all'infinito nella conica secondo cui il piano all'infinito taglia la sfera stessa.

Questa conica immaginaria è sempre la stessa per tutte le sfere dello spazio ed è il luogo dei punti ciclici di tutti i cerchi di ciascuna sfera; la chiameremo perciò *Cerchio immaginario all'infinito.* Viceversa poi è chiaro, per ciò che si è detto al n.° 3, che se una quadrica passa pel cerchio immaginario all'infinito è essenzialmente una sfera (reale o immaginaria).

5. Per le altre superficie di secondo ordine dotate di centro, osserviamo che se i tre assi coordinati sono gli spigoli di un triedro polare, essendo sempre l'origine degli assi il centro della superficie, l'equazione della superficie dovrà necessariamente avere la forma

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D = o \qquad \text{(II)}$$

perchè i tre piani coordinati insieme al piano all'infinito debbono formare un tetraedro polare. Dunque se i coefficienti A, B, C, D sono positivi tutti la (II) non rappresenta una superficie. reale definisce però un sistema polare di spazio. Se siano A, B, C dello stesso segno e D di segno contrario ad A, B, C abbiamo allora una quadrica reale per la quale il *cono assintotico,* cioè il cono che proietta dal centro la sezione della superficie al piano all'infinito, è immaginario; in quanto che è rappresentato dall'equazione:

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = o.$$

La quadrica è tagliata cioè dal piano all'infinito in una conica immaginaria, cioè geometricamente parlando, non è tagliata dal piano all'infinito e dicesi Elissoide. Posto

$$\frac{D}{A} = a^2 \quad \frac{D}{B} = b^2 \quad \frac{D}{C} = c^2,$$

l'equazione della superficie diverrà:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (a)$$

6. Se due dei quattro coefficienti, A, B, C, D hanno lo stesso segno e gli altri due segni opposti ai primi, sicchè l'equazione si possa porre sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (b)$$

allora la superficie sarà a rette reali e sarà detta Iperbolide ad una falda.

Il *cono assintotico* è reale ed ha l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = o.$$

Finalmente se tre dei quattro coefficienti A, B, C, D, che non sieno i primi tre, hanno lo stesso segno e il rimanente segno opposto ai primi, sicchè l'equazione possa mettersi sotto la forma:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (c)$$

allora la superficie è a rette immaginarie, si estende all' infinito, cioè è tagliata dal piano all' infinito in una conica che è quindi la sezione del piano all'infinito col cono *assintotico* reale dato dall' equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=o.$$

7. Vogliamo ora trovare la forma più semplice dell'equazione delle quadriche non dotate di centro. Basta osservare intanto che l'equazione:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2\,a_{23}yz+2\,a_{31}zx+$$
$$+2\,a_{12}xy+2\,a_{14}x+2\,a_{24}y+2\,a_{34}z=o,$$

rappresenta una quadrica qualunque quando l'origine degli assi sia un punto della quadrica.

Ora, come si è fatto altre volte, rendendo omogenea l' equazione della quadrica, si vede subito che

$$a_{11}x+a_{22}y+a_{33}z+a_{23}yz+a_{31}zx+a_{12}xy=o$$

è quella del cono quadrico che proietta dall'origine degli assi la conica secondo cui il piano all'infinito taglia la quadrica.

Quindi essendo $a_{rs}=a_{sr}$ sarà:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=o$$

la condizione perchè la quadrica sia toccata dal piano all' infinito; perchè la relazione scritta è la condizione affinchè il cono che proietta la conica all'infinito della quadrica degeneri nel sistema di due piani reali o immaginarii coniugati. Se quindi assumiamo per asse delle x l'intersezione dei piani nominati; essi saranno rappresentati complessivamente da un' equazione della forma

$$A y^2 + B y z + C z^2 = o,$$

quindi l'equazione delle quadriche non dotate di centro si potrà ridurre alla forma:

$$A y^2 + 2 B y z + C z^2 + L x + M y + N z = o. \quad (d)$$

E secondo che sia

$$B^2 - A C \gtrless o,$$

la quadrica sarà a rette reali o a rette immaginarie. Nel primo caso sarà detta PARABOLOIDE IPERBOLICO O GOBBO.

Nel secondo caso sarà detto PARABOLOIDE ELLITTICO.

8. Assumendo inoltre per piano $y z$ il piano tangente nell'origine, l'equazione delle quadriche in discorso si potrà ritenere della forma ancora più semplice:

$$A y^2 + 2 B y z + C z^2 + D x = o.$$

Essendo

$$y - \lambda z = o$$

l'equazione di un piano qualunque condotto per l'asse x, che è un *diametro* della quadrica, sarà

$$A\lambda\lambda' + B(\lambda + \lambda') + C = o,$$

l'equazione dell'involuzione formata dalle coppie di piani coniugati passanti per l'asse x. Se ora assumiamo per piani $z\,x$, $x\,y$ una coppia di piani coniugati, sicchè il triedro degli assi sia un triedro coniugato rispetto alla quadrica l'equazione si ridurrà ancora alla forma più semplice:

$$L\,y^2 + M\,z^2 + N\,x = o\,;$$

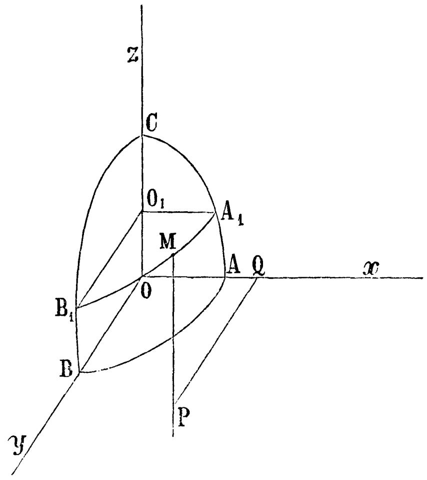

Fig. 7.

Ed allora se L, M hanno lo stesso segno la superficie rappresentata sarà il Paraboloide ellittico; se hanno invece segno contrario la superficie rappresentata sarà il paraboloide gobbo.

9. Del resto le forme semplici ora date dell'equazioni delle quadriche si possono dedurre direttamente colla generazione delle varie quadriche per mezzo di una conica variabile (generatrice) e di due coniche fisse (direttrici).

Vediamo appunto come ciò si possa effettuare. Intanto i punti di una quadrica, geometricamente definita da due stelle reciproche, formano certamente uno spazio a due dimensioni ossia una superficie e debbono quindi le loro coordinate essere legate da una relazione costante e continua. Per trovare tale relazione cominciamo a considerare le superficie dotate di centro. Sia xyz un triedro coniugato rispetto all'ellissoide, essendo il vertice O del triedro l'origine degli assi (fig. 7) ed il centro dell'Ellissoide; e gli spigoli x, y, z del triedro gli assi stessi. Siano

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'equazioni delle Ellissi secondo cui i piani xz, yz tagliano l'Ellissoide. Allora l'Ellissoide stesso è il luogo di un Ellisse variabile che mantenendo il suo piano parallelo al piano xy ha il centro sull'asse z e per diametri coniugati le rette in cui il piano dell'Ellisse variabile taglia i piani xz, yz. Perciò chiameremo *direttrici* l'Ellissi fisse nei piani xz, yz e *generatrice* l'Ellisse variabile. Se

$$z = z_o$$

è l'equazione del piano della direttrice, saranno

$$x^2_o = \left(1-\frac{z_o^2}{c^2}\right)a^2 \qquad y_o^2 = \left(1-\frac{z_o^2}{c^2}\right)b^2$$

i quadrati dei due semi-diametri coniugati dell'Ellisse generatrice nel piano $z = z_0$, e quindi:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z_0^{\,2}}{c^2}\right)}+\frac{y^1}{b^2\left(1-\frac{z_0^{\,2}}{c^2}\right)}=1$$

sarà l'equazione sul piano $z = z_0$ dell'Ellisse generatrice riferita ai diametri coniugati $O_1 A_1$, $O_1 B_1$ sui piani $x z$, $y z$. E sarà finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(I)}$$

l'equazione dell'Ellissoide luogo delle Ellissi no-

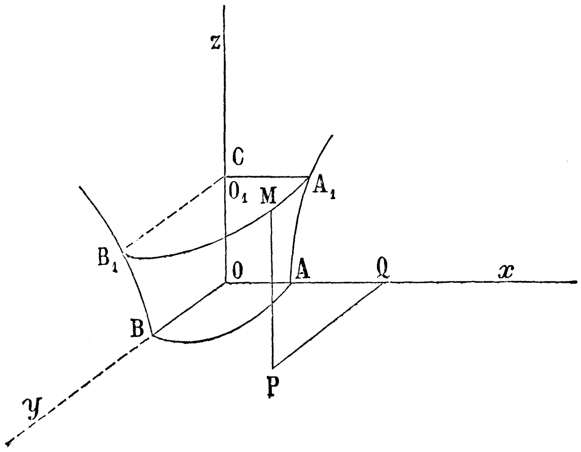

Fig. 8.

minate c, d, t. Allo stesso modo, per l'Iperboloide ad una falda siano (fig. 8)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'equazioni dell'*Iperboli direttrici* secondo cui i piani $x\,z$, $y\,z$ tagliano l'iperboloide riferito ad un triedro $x\,y\,z$ coniugato, il cui vertice sia il centro della superficie. Sarà allora

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{z_o^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{z_e^2}{c^2}\right)} = 1$$

l'equazione dell'Ellisse *generatrice* posta nel piano $z = z_o$ parallelo al piano $x\,y$; e perciò sarà:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{II}$$

l'equazione dell'Iperboloide ad una falda.

10. Per l'*iperboloide a due falde* riferito ad un triedro analogo, siano (fig. 9)

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'equazioni dell'Iperboli direttrici secondo cui i piani $x\,z$, $y\,z$ segano l'iperboloide stesso; e osservando che

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{z_o^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{z_o^2}{c^2} - 1\right)} = 1$$

è l'equazione dell'Ellisse generatrice nel piano

$z = z_0$, sarà:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{(III)}$$

la cercata equazione dell'Iperboloide a due falde

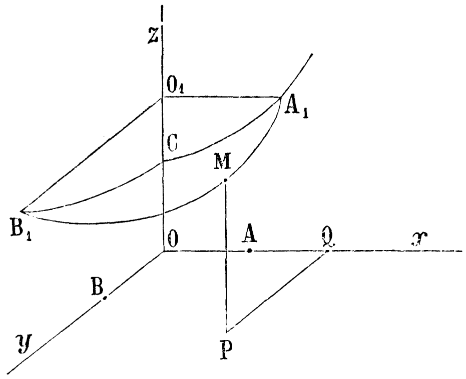

Fig. 9.

11. Per il paraboloide ellittico, essendo p, p' dello stesso segno, siano:

$$x^2 = p\ z$$
$$y^2 = p'\ z$$

l'equazioni delle *parabole direttrici* situate nei piani xz, yz fra loro coniugati, rispetto al paraboloide, e segantesi in un diametro z del paraboloide da cui viene tagliato nel punto O origine degli assi x, y, z a cui viene riferito il paraboloide. Il piano xy è il piano tangente in O alla superficie stessa; e sarà:

$$\frac{x^2}{2\,z_0\,p} + \frac{y^2}{2\,z_0\,p'} = 1$$

l'equazione dell'Ellisse generatrice nel piano $z = z_0$

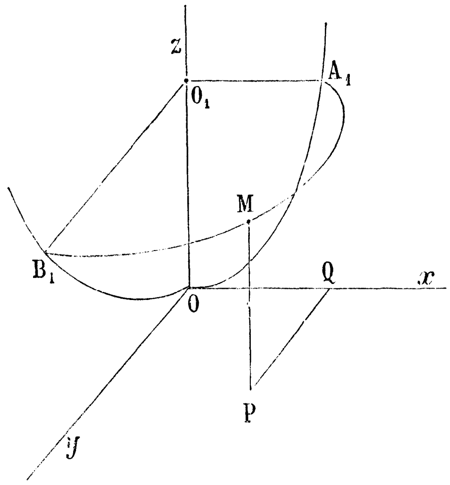

Fig. 10.

onde

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p'} = 2\,z$$

è l'equazione richiesta del paraboloide (fig. 10).

12. Allo stesso modo, essendo nell'equazioni delle parabole direttrici p, p' di segno contrario sarà:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{p'} = 2\,z,$$

l'equazione del paraboloide gobbo riferito ad un triedro coniugato, di cui uno spigolo z è un diametro ed il piano xy è il piano tangente nel punto O in cui il diametro z sega la superficie, essendo adunque O l'origine degli assi (fig. 11). Il paraboloide stesso è generato quindi dall'iperbole il cui piano si mantiene parallelo al

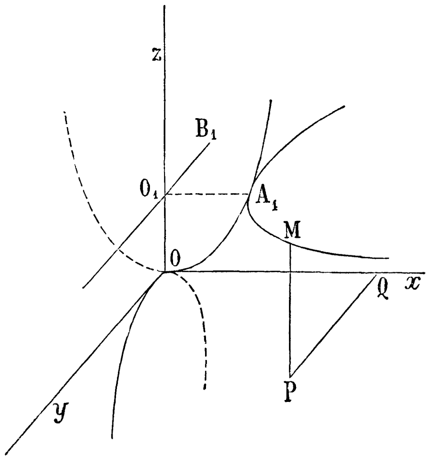

Fig. 11.

piano xy e che ha per diametri coniugati le rette secondo cui il piano di essa sega i piani coordinati xz, yz....

Inoltre l'equazione delle quadriche si possono ottenere, ed anzi, sotto la stessa forma, con assi ortogonali.

Si può osservare da ultimo che in questo caso l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

è quella di una sfera riferita ad un triedro coniugato; e tal equazione si ottiene appunto da quella dell'Ellissoide quando sia

$$a^2 = b^2 = c^2 = r^2.$$

§ 14. Sulle curve e le superficie algebriche.

1. Consideriamo in particolare una curva piana algebrica $C^{(m)}$ rappresentata dall'equazione:

$$f(x, y) = 0$$

del grado m in x, y, essendo x, y le coordinate cartesiane di un punto del piano. Ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_3}{x_3}$$

il primo membro dell'equazione diventerà una funzione omogenea $f(x)$ del grado m nelle variabili x_1, x_2, x_3 che abbiamo già dette le coordinate omogenee cartesiane del punto M di coordinate cartesiane ordinarie x, y; ed essendo:

$$V_r = A_0^{(r)} x_1^2 + A_1^{(r)} x_1^{n-1} x_2 + \ldots + A_r^{(r)} x_2^r;$$

l'equazione della linea $C^{(m)}$ sarà:

$$\left.\begin{aligned} f(x) = V_0 x_3^m + V_1 x_3^{m-1} + \\ + V_2 x_3^{m-2} + \ldots + V \ = 0; \end{aligned}\right\} (1)'$$

e si passa da questa equazione alla primitiva dividendo per x_3^m, oppure ponendo $x_3 = 1$ ed

$$x_1 = x, \quad x_2 = y.$$

Se y_r, z_r $(r = 1, 2, 3)$ sono le coordinate cartesiane omogenee di due punti Y, Z del piano, le formole:

$$\rho\, x_r = y_r + \lambda\, z_r \quad (r = 1, 2, 3), \tag{2}$$

per ogni valore di λ (essendo ρ un numero arbitrario) daranno le coordinate di un punto della retta YZ; e ponendo:

$$\Delta_z f(y) = z_1 \frac{d f(y)}{d y_1} + z_2 \frac{d f(y)}{d y_2} + z_3 \frac{d f(y)}{d y_3}$$

$$\Delta_z^{(2)} f(y) = z_1 \frac{d \Delta_z f(y)}{d y_1} + z_2 \frac{d \Delta f(y)}{d y_2} + z_3 \frac{d \Delta_z f(y)}{d y_3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

e così via, l'equazione (1)' sostituendo in luogo delle x_r $(r = 1, 2, 3)$ i valori (2) diverrà:

$$\left.\begin{array}{c} f(y) + \lambda\, \Delta_z f(y) + \dfrac{\lambda^{(2)}}{1.2} \Delta_z^{(2)} f(y) + \\ \dfrac{\lambda^3}{1.2.3} \Delta_z^{(2)} f(y) + \ldots + \dfrac{\lambda^m}{1.2.m} \Delta_z^{(m)} f(y) = 0, \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

Questa equazione del grado m in λ ammette m radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$. A ciascuna radice λ_r dell'equazione corrisponde per la (2) un punto X_r comune alla retta ed alla linea $C^{(m)}$.

2. Se il punto Y appartiene alla linea sarà

$$f(y) = 0$$

ed appunto allora la (I) è soddisfatta da $\lambda = 0$, e l'equazione:

$$\Delta_z f(y) + \frac{\lambda}{1.2} \Delta_z^{(2)} f(y) + \ldots +$$
$$+ \frac{\lambda^{m-1}}{1.2\ldots m} \Delta_z^{(m)} f(y) = 0$$

dà le altre $m-1$ intersezioni della retta YZ colla linea. Se quindi vogliamo che un'altra intersezione della retta YZ colla $C^{(m)}$ venga a coincidere con Y, dovrà essere:

$$\Delta_z f(y) = z_1 \frac{d f(y)}{d y_1} + z_2 \frac{d f(y)}{d y_2} + z_3 \frac{d f(y)}{d y_2} = 0, \quad (\text{II})$$

e, considerando nell'equazione scritta le coordinate z_r variabili, essa *rappresenta la retta tangente alla curva* $C^{(m)}$ *nel punto* Y.

La tangente è indeterminata soltanto quando sia

$$\frac{d f(y)}{d y_1} = \frac{d f(y)}{d y_2} = \frac{d f(y)}{d y_3} = 0;$$

ossia quando le tre equazioni scritte sono soddisfatte da uno stesso sistema di valori delle coordinate $x = \frac{y_1}{y_3}$, $y = \frac{y_2}{y_3}$ di un punto.

Se queste tre equazioni sono soddisfatte dalle coordinate di un punto, quel punto Y appartiene alla linea, giacchè per il teorema di Eulero, si ha:

$$y_1 \frac{d f(y)}{d y_1} + y_2 \frac{d f(y)}{d y_2} + y_3 \frac{d f(y)}{d y_3} = 2 f(y) = 0.$$

Perchè poi le tre equazioni scritte coesistino, occorre abbia luogo una speciale relazione fra i coefficienti dell'equazione di $C^{(m)}$; relazione che si ottiene eliminando dalle equazioni scritte i rapporti $\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}$.

Dunque una curva algebrica generale nel suo ordine ammette in ciascun punto una determinata tangente. Inoltre ponendo:

$$\xi = \frac{d f(y)}{d y_1} : \frac{d f(y)}{d y_3}; \quad \eta = \frac{d f(y)}{d y_2} : \frac{d f(y)}{d y_3}$$

ed eliminando fra queste ultime equazioni *e* la $f(y) = 0$ i rapporti $\frac{y_1}{y_9}, \frac{y_2}{y_3}$, otterremo un'equazione algebrica

$$F(\xi \eta) = 0$$

fra le coordinate di una qualunque tangente della curva $C^{(m)}$; cioè l'equazione scritta sarà quella dell'inviluppo formato dalle tangenti di $C^{(m)}$ che è dunque *un inviluppo algebrico.*

3. È facile determinarne la classe, perchè osserviamo che il numero delle tangenti che da un punto P del piano di coordinate p_r partono alla linea $C^{(m)}$ è quella data dalle soluzioni comuni nei rapporti $\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}$ delle due equazioni:

$$f(y) = 0$$

$$p_1 \frac{d f(y)}{d y_1} + p_2 \frac{d f(y)}{d y_3} + p_3 \frac{d f(y)}{d y_3} = 0,$$

la prima delle quali è del grado m, e la seconda del grado $m-1$ nei rapporti stessi. Le soluzioni comuni sono quindi $m(m-1)$ al più; dunque la classe dell'inviluppo è $m(m-1)$; ed è il numero che definisce la classe della linea, cioè *una linea algebrica dell'ordine m è in generale della classe* $m(m-1)$, dicendo adunque *classe* di una curva piana algebrica il numero delle tangenti alla linea uscenti da un punto del piano.

4. Correlativamente si dimostrerà che in ogni inviluppo algebrico generale nella sua classe è determinato per ogni sua retta, in modo unico, il relativo punto di contatto; e che i punti di contatto delle rette di un inviluppo della classe m formano una curva algebrica dell'ordine $m(m-1)$.

5. Assumiamo ora l'origine O degli assi in un punto della linea; l'equazione della linea $C^{(m)}$ dovendo essere soddisfatta da $x=y=0$ non conterrà termine noto; cioè sarà $U_0=0$, e l'equazione quindi della forma:

$$f(x\,.\,y)=U_1+U_2+\ldots+U_m=0.$$

Ponendo in generale:

$$U_r(h)=A_0^{(2)}+A_1^{(2)}\,h+A_2^{(2)}\,h^2+\ldots+A_r^{(r)}\,h^r,$$

ed essendo:

$$y=h\,x \qquad (a)$$

l'equazione di una retta qualunque m condotta per l'origine, l'equazione:

$$x\,U_1(h)+x^2\,U_2(h)+\ldots+x^m\,U_m(h)=0 \qquad (\mathrm{I})$$

del grado m in x serve a determinare, colla

$$y = h\,x,$$

le coordinate dei punti comuni alla retta m ed alla linea $C^{(m)}$. L'equazione stessa (I) è soddisfatta da $x = 0$ a cui corrisponde per la (a) il valore $y = 0$; ciò torna a dire che l'origine O è un punto comune alla retta ed alla linea.

L'equazione quindi:

$$U_1(h) + x\,U_2(h) + x^2\,U(h) + \ldots + x^{m-1}\,U_m(h) = 0 \quad (\mathrm{I}')$$

del grado $m - 1$ in x serve a dare, nel modo anzidetto, le ulteriori $m - 1$ intersezioni della retta colla linea $C^{(m)}$. Se quindi vogliamo che un altra di tali intersezioni venga a coincidere coll'origine O, se vogliamo cioè che m prenda la posizione della tangente t in O alla linea, dovrà essere:

$$U_1(h) = A_0^{(1)} + h\,A_1^{(1)} = 0, \qquad (\mathrm{II})$$

onde

$$h = -\frac{A_0^{(1)}}{A_1^{(1)}};$$

e quindi;

$$U_1 = A_0^{(1)}\,x + A_1^{(1)}\,y = 0$$

è l'equazione della tangente in O a $C^{(m)}$.

Il parametro h che fissa la tangente in un punto O qualunque di una curva algebrica $C^{(m)}$ è dato adunque da un'equazione di primo grado; onde *se due rette del piano segassero $C^{(m)}$ in due punti coincidenti in O, dovendo essere ne-*

cessariamente

$$A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = 0,$$

ciò avrebbe luogo per tutte le rette condotte per O; ed il punto O si dice un punto multiplo secondo due.

Osserviamo che se O è un punto multiplo secondo due, l'equazione della linea sarà:

$$U_2 + U_3 + U_4 + \ldots U_m = 0;$$

giacchè si ha identicamente $U_1 = 0$. L'equazione che dà le altre $m-2$ intersezioni di una retta $y = hx$ condotta per O colla linea $C^{(m)}$, sarà:

$$U_2(h) + x\,U_3(h) + \ldots, + x^{m-2}\,U_m(h) = 0.$$

Segue subito che le due rette condotte per l'origine, i cui parametri h sono le radici dell'equazione quadratica:

$$U(h) = A_0^{(2)} + A_1^{(2)}\,h + A_2^{(2)}\,h^2 = 0,$$

sono rette speciali del fascio O, perchè ciascuna sega la $C^{(m)}$ in tre punti coincidenti in O.

Se:

$$(A_1^{(2)})^2 - 4\,A_0^{(2)}\,A_2^{(2)} > 0$$

le rette saranno reali e distinte: e risulta subito che tali rette h_1, h_2 saranno tangenti ai due rami di linea che essenzialmente si incrociano in O, formando ivi un nodo; giacchè un punto M generatore della linea $C^{(m)}$ nelle vicinanze del punto O, si deve accostare necessariamente all'una e poi all'altra delle due rette h_1, h_2 più che a qualunque altra retta condotta per O;

quindi il punto generatore passa due volte per O in due differenti direzioni. In questo caso il punto O è un *punto doppio* propriamente detto.

Se sia:

$$(A_1^{(2)})^2 - 4\, A_0^{(2)}\, A_2^{(2)} = 0$$

allora le due rette h_1, h_2 coincidono in una sola retta h_0; il punto O dicesi *cuspide,* o *punto di regresso* o *punto stazionario*; perchè è evidentemente prodotto quando il punto M generatore della linea $C^{(m)}$ arrivato in O ripassa istantaneamente per O anzichè far altro cammino sulla linea; e si può dire che la cuspide è un caso limite del punto doppio quando il nodo restringendosi si riduce ad un punto.

Se poi sia:

$$(A_1^{(2)})^2 - A_0^{(2)}\, A^{(2)} < 0$$

allora le rette h_1, h_2 non esistono ossia sono *immaginarie*, dicendo in generale *immaginario* un elemento del piano i cui parametri siano tutti od in parte, almeno, immaginarii. In tal caso il punto O multiplo secondo 2 si dice punto isolato.

6. In generale se O è un punto di $C^{(m)}$ tale che ogni retta arbitrariamente per O sega ivi la linea $C^{(m)}$ in r punti; sicchè quella retta non tagli la linea che in altri $m-r$ punti, allora O dicesi *punto multiplo secondo* r.

Se siano h_1, $h_2 \ldots . h_r$ i parametri di r rette che segano $C^{(m)}$ in r punti coincidenti in O, io dico che tutte le altre rette condotte per O godono della stessa proprietà, cioè O è un punto multiplo secondo r.

Infatti per l'ipotesi fatta dovremo avere identicamente:

$$U_1(h) = 0 \quad U_2(h) = 0 \quad U_{r-1}(h) = 0,$$

onde l'equazione della linea $C^{(m)}$ sarà della forma

$$U_r + U_{r+1} + \ldots + U_m = 0;$$

donde segue immediatamente che r intersezioni della retta colla linea sono riunite in O e le altre $m - r$ sono date dalla:

$$U_r(h) + x\, U_{r+1}(h) + x^2\, U_{r+2}(h) + \ldots$$
$$+ x^{m-r}\, U_m(h) = 0.$$

Osserviamo inoltre che l'equazione:

$$U_r(h) = 0$$

dà i parametri di r rette ciascuna delle quali sega la linea in $r + 1$ punti, anzichè in soli r coincidenti in O.

Se queste rette sono reali e distinte è chiaro allora che il punto M generatore della linea $C^{(m)}$ assumerà r volte la posizione O; ed O dicesi propriamente punto r^{plo} di $C^{(m)}$; cioè un punto r^{plo} è quello prodotto dal punto generatore della linea $C^{(m)}$, quando acquista r volte una medesima posizione O. Risulta poi che una curva algebrica d'ordine m, che abbia un punto multiplo secondo m, è il sistema di m rette che passano per quel punto. Infatti per ciò che precede la equazione del luogo è della forma

$$U_m = o,$$

ed U_m essendo una funzione omogenea del grado m nelle x, y, l'equazione scritta rappresenta il sistema di m rette passanti per il punto m^{plo} che è l'origine o degli assi.

Se una linea $C^{(n)}$ d'ordine n passa pel punto r^{plo} O di un'altra linea $C^{(m)}$ d'ordine m si ritiene che in O siano riunite r intersezioni delle due linee; cioè le intersezioni di $C^{(n)}$, cogli r rami di $C^{(m)}$ passanti per O.

Se la linea $C^{(n)}$ ha in O la tangente coincidente con una delle r tangenti agli r rami di $C^{(m)}$ allora in O sono riunite $r+1$ intersezioni delle linee e così via.

7. Avremo le definizioni e le proprietà correlativi degli inviluppi piani algebrici, che enunceremo valendosi appunto del principio di dualità del piano.

Diremo che una retta t di un inviluppo algebrico $\gamma^{(m)}$ della classe m, ossia una tangente t di una curva algebrica $C^{(n)}$ di classe m è *multipla secondo r,* se in quella retta coincidono r rette dell'inviluppo; ossia r tangenti della linea; sicchè da un punto arbitrariamente preso su t partono altre $m-r$ tangenti della linea $C^{(n)}$ v rette dell'inviluppo $\gamma^{(m)}$.

Se quindi per r punti di una retta t dell'inviluppo γ^m ha luogo la proprietà contenuta nella definizione della retta multipla, questa proprietà avrà luogo pegli altri punti della retta t; cioè la retta t sarà retta multipla secondo r.

Se t è una tangente multipla secondo r, allora sulla retta t vi saranno, in generale, i relativi r punti di contatto, cioè r punti di t da cui partono soltanto $m - (r + 1)$ tangenti alla linea; ossia r punti di t per ciascuno dei quali passano $r + 1$ tangenti coincidenti con t anzichè r soltanto. Quindi se gli r punti coincidenti sono reali e distinti, allora la retta t si dice propriamente *retta* r^{pla} dell'inviluppo, ossia tangente r^{pla} della linea, perchè appunto quella retta è una posizione acquistata r volte dalla retta generatrice dell'inviluppo $\gamma^{(m)}$ delle tangenti alla curva algebrica.

8. In particolare un inviluppo algebrico $\gamma^{(m)}$ potrà avere una tangente multipla secondo 2, che presenta i tre casi correlativi al punto multiplo secondo 2.

Cioè la retta t potrà essere una tangente doppia propriamente detta, quando i punti di contatto essendo reali, sono anche distinti. Potranno quei punti coincidere, e allora la retta t si dice *tangente stazionaria* e il punto di contatto punto d'inflessione della linea.

Finalmente la retta t sarà detta isolata se i punti di contatto sono immaginarii.

Un inviluppo di classe m che abbia una tangente m^{pla}, si spezza in inviluppi di 1ª classe, cioè in m fasci di raggi che hanno i centri sulla retta multipla. — È bene poi ritenere che una tangente stazionaria ha tre punti consecutivi comuni alla linea; perchè si ha evidentemente una tangente stazionaria quando una delle altre $m - 2$ intersezioni di una tangente alla linea tende a coincidere col punto di contatto. E correlativamente: La tangente cuspidale conta per tre tangenti riunite della linea.

9. In generale: *proiettando da un punto V di coordinate* x_0, y_0, z_0 *una curva algebrica* piana o gobba $C^{(k)}$ *d'ordine k rappresentata dalle equazioni*:

$$f(x\,y\,z) = 0 \quad \varphi(x\,y\,z) = 0$$

si ottiene un cono d'ordine k. Infatti saranno:

$$x - x_0 = \rho(z - z_0)$$
$$y - y_0 = \delta(z - z_0)$$

le equazioni di una retta passante per V; ed eliminando quindi fra le equazioni della retta e quelle della linea $C^{(k)}$ le x, y, z si ottiene una relazione algebrica

$$F(\rho, \delta) = 0$$

fra le costanti ρ δ che determinano una retta passante per V, che si appoggia in un punto alla curva $C^{(k)}$. Se ora in luogo delle quantità ρ, δ mettiamo i loro valori

$$\rho = \frac{x - x_0}{z - z_0}, \quad \delta = \frac{y - y_0}{z - z_0}$$

l'ultima equazione si cangerà in una equazione algebrica nelle x, y, z coordinate di un punto corrente del cono, che sarà dunque algebrico.

L'ordine si determina osservando che un piano passante pel vertice V contiene tante generatrici del cono quanti punti della curva $C^{(k)}$; l'ordine è dunque K.

Quando V fosse sulla linea $C^{(k)}$ l'ordine del cono si abbassa di una unità; e fra le generatrici del cono vi è la tangente in V alla linea $C^{(k)}$. Quando il vertice del cono è all'infinito, o, in altri termini quando le generatrici sono parallele ad una retta fissa, allora si ha un *cilindro* proiettante la linea.

10. Un piano condotto per una tangente ad una linea gobba $C^{(k)}$ si dice *piano tangente* alla linea. Se un'altra delle $K-2$ intersezioni di un piano tangente p alla linea $C^{(k)}$ d'ordine K, tende a coincidere col punto contatto, allora il piano tangente alla $C^{k)}$ assume, in generale, una determinata posizione limite e si dice allora *piano osculatore* alla linea $C^{k)}$. Il piano osculatore in un punto M ad una linea gobba $C^{(k)}$ si può definire come quello che contiene il punto M e le posizioni M' M'' contigue ad M quando un punto mobile genera la linea.

Quindi il piano osculatore stesso può essere definito: *il piano di due tangenti consecutive della curva gobba;* ed un punto della curva si può definire *la intersezione di due tangenti contigue della linea* oppure l'*intersezione di tre piani osculatori contigui.*

Si può ritenere: *I piani osculatori nei diversi punti di una linea gobba formano una sviluppabile-inviluppo.*

11. Se

$$\left.\begin{array}{l} f\,(x\,y\,z) = o \\ \varphi\,(x\,y\,z) = o, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

sono l'equazioni di una linea riferita a tre assi coordinati dello spazio e se i coefficienti delle equazioni sono funzioni di un parametro λ, allora variando λ da $-\infty$ o $+\infty$ avremo una serie infinita di linee, il cui luogo geometrico sarà la superficie rappresentata dall'equazione che si ottiene eliminando il parametro λ fra le (1).

Se le (1) sono l'equazioni di una retta, allora la superficie generata si dirà superficie *rigata* oppure *Rigata* semplicemente.

Una rigata si dirà anche *superficie gobba* nel caso generale che ciascuna posizione della retta generatrice non sia tagliata dalla posizione consecutiva; e si dirà invece *sviluppabile* se in ogni posizione la retta generatrice è tagliata dalla posizione consecutiva. Così le superficie coniche sono evidentemente superficie sviluppabili; e in generale le tangenti di una curva gobba formano una rigata sviluppabile, e viceversa, perchè ogni generatrice di una rigata sviluppabile è tagliata da quelle che immediatamente la segue e da quella che la precede, così risulta adunque che se una retta genera una rigata sviluppabile, essa si mantiene tangente ad una linea, la quale dicesi lo *spigolo* di *regresso* della sviluppabile, mentre la sviluppabile formata dalle tangenti dicesi *osculatrice* alla linea stessa.

Osserviamo ora che una sviluppabile-inviluppo determina una *rigata-sviluppabile.* Poichè come per ogni punto di una linea $C^{(k)}$ abbiamo una retta tangente, così, colla definizione correlativa, in ogni piano di una sviluppabile-inviluppo esiste una retta g che è l'intersezione di quel piano colla sua posizione consecutiva quando il piano genera la sviluppabile. La retta g è detta la retta di contatto del piano. Il luogo delle rette g di contatto dei piani di una sviluppabile-inviluppo è dunque una rigata sviluppabile-inviluppo, perchè in ogni piano dell' inviluppo vi sono due rette g, quella in cui il piano è tagliato da quello che immediatamente lo precede e lo segue nella generazione dell' inviluppo.

È dunque a ritenersi:

Una curva gobba ha per figura correlativa nello spazio una sviluppabile-inviluppo e le tangenti della curva gobba formano una rigata-sviluppabile avente per correlativa pure una rigata-sviluppabile luogo delle rette di contatto dei piani della sviluppabile-inviluppo. I piani di una sviluppabile-inviluppo, per una ragione che diremo fra breve, si dicono i piani tangenti alla rigata sviluppabile rispettivamente lungo le loro generatrici di contatto.

Ritornando ora al caso particolare delle superficie coniche o cilindriche, è utile anche osservare che il cono luogo, ossia il cono semplicemente detto, e il cono-inviluppo sono figure fra loro correlative nella geometria della stella, e che la geometria di queste figure si ricava colla proiezione da quella e delle curve e degli inviluppi piani. Così definendo *piano tangente lungo una generatrice g* di un cono il piano della generatrice g e della sua consecutiva, ne segue *che i piani tangenti di un cono luogo formano un cono inviluppo, e le rette di contatto del cono inviluppo formano le generatrici del cono luogo.* In altri termini: Un cono può essere determinato come luogo delle sue rette o come inviluppo dei suoi piani tangenti.

Colla proiezione estendiamo ai coni algebrici le definizioni di generatrice multipla e di piano tangente multiplo e chiameremo tali elementi singolarità ordinarie dei coni algebrici.

Si ottiene adunque una generatrice multipla secondo r in quella che proietta un punto della curva base multiplo secondo r e in modo correlativo si ottiene un piano tangente multiplo.

In generale quindi un cono algebrico viene tagliato da un piano qualunque in una curva algebrica dello stesso ordine del cono e che ha le stesse singolarità ordinarie del cono.

Due coni algebrici aventi lo stesso vertice e che siano degli ordini m, n hanno in comune una generatrice al più; e correlativamente per i coni-inviluppi.

Inoltre *la classe di un cono* essendo data dal numero dei piani tangenti al cono condotti per un punto dello spazio, questi sono anche i piani tangenti al cono passanti per una retta condotta per il vertice del cono, ecc.

In generale proiettando una curva gobba $C^{(k)}$ d'ordine K da un solo punto si ottiene un cono d'ordine $K-1$ che contiene fra le sue generatrici la tangente t in K alla curva $C^{(k)}$. Il piano tangente al cono lungo la tangente t è il piano osculatore in t alla curva $C^{(k)}$.

S'intendono fatte le considerazioni correlative per la determinazione dei punti dello spigolo di regresso di una sviluppabile-inviluppo.

12. In generale una retta che si appoggia a tre curve $C^{(m)}$, $C^{(n)}$, $C^{(p)}$ genera evidentemente una rigata; anzi se le curve sono algebriche degli ordini m, n, p rispettivamente, la rigata è algebrica e dell'ordine $2\,m\,n\,p$.

Infatti se

$$\begin{array}{c|c|c} f=0 & \varphi=0 & \psi=0 \\ f'=0 & \varphi'=0 & \psi'=0 \end{array}$$

sono le equazioni di $C^{(m)}$, $C^{(n)}$, $C^{(p)}$ allora eliminando x, y, z fra ciascuna coppia di equazioni scritte e quelle della retta:

$$x = r\,z + \rho$$
$$y = s\,z + \delta$$

si otterranno tre relazioni algebriche

$$M\ (r\,\rho\,s\,\delta) = 0$$
$$M'\ (r\,\rho\,s\,\delta) = 0$$
$$M''\ (r\,\rho\,s\,\delta) = 0$$

fra le costanti $r, \rho,\ s, \delta$ che determinano una retta qualunque che si appoggia alle tre curve date. Quindi se fra le tre ultime equazioni scritte e quelle della retta eliminiamo le $r,\ s, \rho, \delta$ otterremo una relazione algebrica

$$P\ (x, y, z) = 0$$

fra le coordinate di un punto corrente del luogo domandato. Dunque la rigata formata dalle rette che si appoggiano alle tre curve è algebrica. Per definirla basterà proiettare da un punto di $C^{(m)}$ le curve $C^{(n)}$, $C^{(p)}$, otterremo due coni di ordine n, p che avranno al più $n\,p$ generatrici comuni che sono generatrici della superficie.

Avendo dimostrato che la rigata S è algebrica quando le *direttrici* $C^{(m)}$, $C^{(n)}$, $C^{(p)}$ sono algebriche, troviamone l'ordine. Alla curva $C^{(m)}$ sostituiamo una retta r che con $C^{(n)}$, $C^{(p)}$, come direttrici, determinerà una nuova rigata S' il cui ordine sia X'.

Dicendo X l'ordine della data avremo:

$$X = m\,X'$$

perchè i punti in cui $C^{(m)}$ sega la rigata S' sono $m\,X'$; ammettendo che il numero delle intersezioni di una curva $C^{(m)}$ con una superficie $S^{x'}$ d'ordine X' non dipende dalla forma $C^{(m)}$ ma solo dall'ordine m, cosicchè a $C^{(m)}$ possono essere sostituite m rette. Dunque mX' sono i punti in cui la retta arbitraria r taglia la primitiva rigata S, poichè per ciascuno degli mX' punti nominati passa una generatrice di S', che è anche generatrice di S. Sostituendo a $C^{(n)}$ un'altra retta g e dicendo X'' l'ordine della rigata S'' determinata dalle tre direttrici r, g, $C^{(p)}$, avremo analogamente:

$$X' = n\,X''.$$

Finalmente sostituendo a $C^{(p)}$ una retta l ed osservando che la rigata S''' che ha per direttrici le rette r, g, l è del secondo ordine, cioè una quadrica gobba, avremo:

$$X'' = 2\,p.$$

Quindi:

$$X = 2\,m\,n\,p,$$

cioè: *l'ordine della rigata,* è $2\,m\,n\,p$.

Si ha la generazione correlativa della superficie-inviluppo per mezzo di una sviluppabile-inviluppo, variabile di forma e di posizione; e si estendono alle superficie-inviluppo col principio di dualità le cose dette per le superficie-luogo generate da una linea variabile di posizione e di forma.

13. Immaginiamo una superficie qualunque S generata da una linea mobile C. Diremo *tangente* alla superficie S ogni retta che unisce due punti contigui della superficie. Ciò posto io dico che in generale le tangenti in un punto M ad *una superficie S sono in un piano che si dirà il piano tangente in M alla superficie.* Concepiamo infatti sulla superficie due delle linee C_1, C_2 tagliate nei punti M_1, M_2 da una posizione qualunque G della linea generatrice la superficie S. Quando la generatrice G movendosi a generare S, si accosta infinitamente alla posizione G' passante per M, allora il piano dei tre punti M, M_1, M_2 diventa il piano delle tre rette t, t', t'' tangenti in M rispettivamente a C', C_1, C_2; epperò t, t', t'' sono anche tangenti in M alla superficie S. Ora possiamo far variare una e poi l'altra delle due linee C_1, C_2; e quindi in questo modo viene ad essere provato che le tangenti in M ad S sono in un piano, determinato da due qualunque delle rette stesse.

Se la superficie S è algebrica, allora immaginiamo due sezioni piane passanti per il punto M della superficie. Queste sezioni saranno linee algebriche $C^{(m)}$ d'ordine m se la superficie è una superficie $S^{(m)}$ d'ordine m.

Ciò posto immaginiamo le tangenti t_1. t_2 in M alle due sezioni piane. Il piano $t_1\,t_2$ taglierà la superficie $S^{(m)}$ in una curva $C_0^{(m)}$ d'ordine m, che avrà in M un punto almeno multiplo secondo 2, perchè le due rette t_1, t_2 condotte per M segano $C^{(m)}$ in due punti coincidenti in M, epperò ogni retta condotta per M, nel piano t_1, t_3, sega $C_0^{(m)}$ in due punti coincidenti in M; cioè quella retta è tangente in M alla superficie; e il piano $t_1\,t_2$ è dunque il piano tangente in M alla superficie stessa. Viceversa poi è chiaro che se un piano sega una superficie algebrica in una linea che ha in un punto M un punto multiplo secondo *due*, allora quel piano è tangente in quel punto alla superficie.

14. Il piano tangente in un punto M ad una superficie algebrica taglia adunque la superficie in una linea $C_0^{(n)}$ che nel punto M ha un punto multiplo secondo 2. Quando M è un punto doppio propriamente detto di $C_0^{(m)}$ allora M si dice un *punto iperbolico* della superficie. Le tangenti ai due rami di $C_0^{(m)}$ che si incrociano in M si dicono le rette osculatrici della superficie. Se M è una cuspide per $C_0^{(m)}$, allora M si dice un *punto parabolico* della superficie. Se finalmente M è un punto isolato di $C_0^{(m)}$, si dice *elittico* per la superficie.

È evidente che: *Il piano tangente in un punto M di una superficie rigata contiene la generatrice passante per quel punto; e se la rigata è sviluppabile, il piano tangente in un punto contiene la generatrice che passa per quel punto e la posizione contigua della generatrice stessa.*

Quindi: *I piani tangenti nei diversi punti di una stessa generatrice y di una rigata sviluppabile, coincidono in un sol piano determinato da quella generatrice e dalla sua posizione contigua,* quando y genera la rigata. Un tal piano lo abbiamo appunto prima chiamato: *piano tangente lungo la generatrice y.* È evidente poi, che i punti di una rigata generale, cioè di una *superficie gobba* sono *iperbolici*; mentre quelli di una rigata sviluppabile sono parabolici.

15. Per una rigata generale, cioè per una superficie gobba si ha in generale il teorema:

I piani tangenti nei punti di una stessa generatrice y formano un fascio proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto.

Infatti y, y', y'' siano posizioni consecutive della generatrice, essendo y, y', y'' rette a due a due non poste in generale in uno stesso piano, determinano, come direttrici, una rigata di 2° ordine, cioè una quadrica gobba la quale ha evidentemente, nei punti della retta y, gli stessi piani tangenti che la superficie gobba data; dunque essendo dimostrato vero il teorema enunciato per una quadrica gobba, ne segue che il teorema è vero per la superficie gobba data. Di qui segue che ogni piano condotto per una generatrice di una superficie gobba è tangente alla superficie in un punto unico e determinato di quella generatrice; e che essendo dati i piani tangenti in tre punti di una generatrice si costruiscono per mezzo della Geometria proiettiva i piani tangenti nei varii altri punti della generatrice stessa; oppure si trova di ogni altro piano condotto per quella generatrice il relativo punto di contatto.

Segue ancora immediatamente:

Se due superficie gobbe hanno una generatrice in comune, e in tre punti di essa gli stessi piani tangenti le superficie gobbe si toccano lungo la generatrice comune; cioè tutti i punti di quella generatrice hanno gli stessi piani tangenti.

Se quindi una rigata generale è data per le sue tre direttrici D_1, D_2, D_3 e indichiamo con t_1, t_2, t_3 le tangenti nei punti M_1, M_2, M_3 in cui una generatrice g sega le direttrici, allora le tangenti stesse t_1, t_2, t_3 determinano come direttrici, una quadrica che nei punti di g ha gli stessi piani tangenti della superficie data.

16. In generale è chiaro che i piani tangenti nei varii punti di una superficie formano una superficie inviluppo, cioè una serie doppiamente infinita di piani.

Data invece una superficie inviluppo, ogni piano dell'inviluppo avrà in generale il *relativo punto di contatto* determinato colla definizione correlativa del piano tangente, cioè:

Il punto di contatto di un piano μ in una superficie-inviluppo è il punto ove μ è tagliato dalle sue posizioni contigue. I punti di contatto di una superficie inviluppo formano quindi una *superficie* semplicemente detta; e ritenendo che siano contigui i punti di contatto di due piani contigui, ne segue che i piani dell'inviluppo non sono altro che i piani tangenti della superficie luogo dei punti di contatto.

In altri termini:

Una superficie può essere determinata o come luogo dei suoi punti o come inviluppo de' suoi piani tangenti.

17. *Se una superficie è algebrica e dell'ordine m l'inviluppo de' suoi piani tangenti è algebrico, e in generale della classe* $m(m-1)^2$.

Infatti sia

$$f(x) = 0.$$

L'equazione della superficie S^m di ordine m resa omogenea, ponendo, in luogo delle coordinate cartesiane x, y, z, le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4; essendo:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Indichiamo con y_r, z_r le coordinate di 2 punti Y, Z, le formole:

$$x_r = y_r + \lambda z_r \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

dànno per ogni valore di λ le coordinate x_r di un punto della retta YZ. Ponendo quindi

$$\Delta_z f(y) = z_1 \frac{d f(y)}{d y_1} + \ldots z_4 \frac{d f(y)}{d y_4},$$

$$\Delta^2_z f(y) = z_1 \frac{d \Delta_z f(y)}{d y_1} + \ldots + z_4 \frac{d \Delta^z f(y)}{d y_4}$$

e così via, l'equazione:

$$f(y) + \lambda \Delta_z f(y) + \frac{\lambda^2}{1.2} \Delta^2_z f(y) + \ldots$$

$$+ \frac{\lambda^m}{1\,2 \ldots m} \Delta_z^m f(y) = 0$$

del grado m in λ, serve a dare le m intersezioni della retta YZ colla superficie data. Se Y è un punto della superficie sarà:

$$f(y) = 0$$

e l'equazione precedente è appunto soddisfatta da $\lambda = 0$; l'equazione adunque:

$$\Delta_z f(y) = z_1 \frac{d f(y)}{d y_1} + z_2 \frac{d f(y)}{d y_2} + z_3 \frac{d f(y)}{d y_3} + + z_4 \frac{d f(y)}{d y_4} = 0,$$

al variare delle z_r rappresenta un piano che contiene le rette YZ che segano la superficie in due punti riuniti in Y; cioè l'equazione scritta è quella del piano tangente in Y alla superficie. Segue di qui che eliminando i rapporti

$$\frac{y_1}{y_4}, \quad \frac{y_2}{y_4}, \quad \frac{y_3}{y_4}$$

dalle equazioni:

$$f(y) = 0$$

$$\frac{d f(y)}{d y_4} t = \frac{d f(y)}{d y_1}; \quad \frac{d f(y)}{d y_4} u = \frac{d f(y)}{d y_2};$$

$$\frac{d f(y)}{d y_4} w = \frac{d f(y)}{d y_3}.$$

Si otterrà una relazione algebrica fra le coordinate plucheriane t, u, w di un piano tangente corrente della superficie. Dunque l'inviluppo dei piani tangenti di una superficie algebrica è algebrico. Troviamo ora la classe dell'inviluppo

Osserviamo perciò che le tre equazioni:

$$f(x) = 0,$$

$$y_1 \frac{d f(x)}{d x_1} + y_2 \frac{d f(x)}{d x_2} + \ldots + y_4 \frac{d f(x)}{d x_4} = 0$$

$$z_1 \frac{d f(x)}{d x_1} + z_2 \frac{d f(x)}{d x_2} + \ldots + z_4 \frac{d f(x)}{d x_4} = 0$$

sono rispettivamente dei gradi m, $m-1$, $m-1$ nei rapporti

$$\frac{x_1}{x_4}, \quad \frac{x_2}{x_4}, \quad \frac{x_3}{x_4};$$

quindi ammettono in generale $m(m-1)^2$ soluzioni comuni nei rapporti stessi. Dunque per la retta YZ passano in generale $m(m-1)^2$ piani tangenti alla superficie $S^{(m)}$; dunque tale è la classe dell'inviluppo formato dai piani tangenti di $S^{(m)}$, ed $m(m-1)^2$ si dice perciò senz'altro la *classe* della superficie $S^{(m)}$. *Classe* adunque *di una superficie algebrica è il numero dei piani tangenti della superficie passanti per una retta.*

18. In particolare: *la classe di una superficie gobba algebrica eguaglia l'ordine della superficie stessa.* Ed invero i punti in cui una retta taglia una superficie gobba ossia una rigata generale, sono tanti quante sono le generatrici della superficie incontrate dalla retta. Quindi la retta stessa determina con quelle generatrici altrettanti piani tangenti. Per esprimere poi che in una rigata generale l'ordine eguaglia la classe m della superficie, si dice che la rigata è di grado m.

Classe di una superficie sviluppabile è quella dell' inviluppo de' suoi piani tangenti, cioè: *il numero dei piani tangenti alla sviluppabile condotti* per un punto preso ad arbitrio nello spazio.

Risulta ancora in generale: *I piani tangenti ad una superficie d' ordine m passanti per un punto fisso Y, inviluppano un cono d'ordine $m(m-1)$, giacchè il cono è quello che proietta da Y i punti di contatto dei piani tangenti nominati; i quali punti formano una curva $C^{m(m-1)}$ d'ordine $m(m-1)$.*

Il cono in discorso è il luogo delle tangenti condotte da Y alla superficie; nei punti di contatto di tali tangenti, cioè nei punti della curva $C^{m(m-1)}$ la superficie e il cono hanno gli stessi piani tangenti. Gli è perciò che il cono in discorso si dice *circoscritto o tangente alla superficie lungo la linea* $C^{m(m-1)}$.

Da quanto si è detto segue ancora:

I piani tangenti comuni a due superficie qualisivogliono di classe h, k inviluppano una rigata-sviluppabile di classe h k, che è il luogo delle rette congiungenti i punti di contatto di ciascun piano tangente alle due superficie, come per ciascun punto della intersezione di due superficie, la tangente in quel punto all' intersezione stessa è la retta comune ai piani tangenti in quel punto alle due superficie.

19. La curva gobba $C^{(mn)}$ completa intersezione di due superficie algebriche di ordine m, n, e rappresentate dalle equazioni omogenee:

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0$$

è una curva gobba d'ordine $m\,n$; e la tangente nel punto Y alla linea sarà rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 \frac{d f(y)}{d\,y_1} + \ldots + x_4 \frac{d f(y)}{d\,y_3} = 0$$

$$x_1 \frac{d \varphi(y)}{d\,y_1} + \ldots + x_4 \frac{d \varphi(y)}{d\,y_4} = 0$$

essendo inoltre:

$$f(y) = 0, \quad \varphi(y) = 0.$$

Quindi, eliminando fra le 4 equazioni scritte i rapporti:

$$\frac{y_1}{y_4}, \quad \frac{y_2}{y_4}, \quad \frac{y_3}{y_4},$$

si otterrà una relazione algebrica fra le coordinate di un punto qualunque di una tangente qualunque alla curva $C^{(m\,n)}$; cioè:

La sviluppabile osculatrice di una curva algebrica è certamente algebrica e dell'ordine

$$m\,n\,(m + n - 2)$$

se la curva $C^{(m\,n)}$ è la completa intersezione di due superficie algebriche degli ordini $m\,n$.

Infatti per dimostrare che l'ordine della sviluppabile è $m\,n(m+n-2)$ basta osservare che il numero domandato è quello stesso delle tangenti alla curva $C^{(m\,n)}$ incontrate da una retta arbitraria data dalle equazioni:

$$\xi_1\,x_1 + \xi_2\,x_2 + \xi_3\,x_3 + \xi_4\,x_4 = 0$$

$$\eta_1\,x_1 + \eta_2\,x_2 + \eta_3\,x_3 + \eta_4\,x_4 = 0,$$

e queste tangenti sono tante quante sono le soluzioni comuni delle tre equazioni:

$$f(x) = 0$$

$$\varphi(x) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d f(x)}{d x_1} & \frac{d f(x)}{d x_2} & \frac{d f(x)}{d x_3} & \frac{d f(x)}{d x_4} \\ \frac{d \varphi(x)}{d x_1} & \frac{d \varphi(x)}{d x_2} & \frac{d \varphi(x)}{d x_3} & \frac{d \varphi(x)}{d x_4} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} = 0$$

rispettivamente di grado m, n, $m+n-2$ nei rapporti:

$$\frac{x_1}{x_4}, \quad \frac{x_2}{x_4}, \quad \frac{x_3}{x_4}$$

epperò le tangenti nominate sono $mn(m+n-2)$ c. d. d.

È facile concepire l'enunciato correlativo del teorema precedente. Se lo spazio ordinario viene definito come al § 1, allora, operando come per il piano, si troverà che i rapporti

$$\frac{x_1}{x_4}, \quad \frac{x_2}{x_4}, \quad \frac{x_3}{x_4}$$

delle coordinate omogenee di un punto M sono appunto i rapporti anarmonici del § 2, che sono determinati col punto M e coi cinque punti fondamentali.

FINE.

ELENCO COMPLETO

DEI

MANUALI HOEPLI

illustrati e rilegati

pubblicati a tutto Giugno 1888

La Collezione dei *Manuali Hoepli* inaugurata col proposito di nder popolari i principii delle Scienze e proseguita con lieta :tuna fino ad oltre duecento volumi in pochissimi anni col conrso dei più distinti scienziati, si suddivide in alcune Serie seado le materie trattate, come segue:

SERIE SCIENTIFICA

a Lire **1, 50**

e abbraccia le scienze propriamente dette, ed alcune più imporᐧnti loro applicazioni;

SERIE PRATICA

a Lire **2, —**

contenente una raccolta di volumi che trattano di industria, di nozioni utili nella vita pratica;

SERIE ARTISTICA

a Lire **2, —**

Questa abbraccia l'Architettura, la Pittura, la Scoltura, ed argomenti congeneri.

MANUALI SPECIALI

Questa serie comprende alcune applicazioni della Scienza all'industria, ed argomenti diversi. In essa figurano quei volumi che per mole o per abbondanza d'incisioni non si possono classificare nelle serie precedenti a prezzi determinati.

L'Elenco generale alfabetico si trova nelle seguenti pagine.

Adulterazione e falsificazione degli alimenti, di L. Gabba, pag. VIII-211 . . . . L. 2 —

Agronomia, di Carega di Muricce, 2.ª edizione, pag. 199 » 1 50

Algebra elementare, di S. Pincherle, 2.ª ediz., pag. VI-207 » 1 50

Alimentazione, di G. Strafforello, pag. VIII-122 . . . » 2 —

Alpi (le), di J. Ball, trad. di I. Cremona, pag. VI-120 . » 1 50

Analisi del vino nel riguardo sanitario e legale, di J. Barth, trad. Comboni, di pag. 141 con 7 incisioni . . . . » 2 —

Anatomia pittorica, di A. Lombardini, pag. VI-118 con 39 inc. » 2 —

Animali da cortile, di P. Bonizzi, pag. VIII-238 con 39 inc. » 2 —

Antichità private dei Romani, di Kopp, trad. Moreschi, pag. XII-130 con 5 incisioni . . . . » 1 50

Antropologia, di G. Canestrini, 2.ª edizione ampliata, pagine VIII-232, con 23 incisioni . . . . » 1 50

Apicoltura razionale, di G. Canestrini, pag. VIII-175, con 32 incisioni . . . . » 2 —

Arabo volgare, di De Sterlich e Dib Khaddag. Raccolta di 1200 vocaboli e 600 frasi più usuali, pag. 143, con 8 tavole » 2 50

Araldica (Grammatica), di F. Tribolati, 2.ª ediz., pag. VIII-114, con 198 incisioni e un' appendice sulle *Livree* . . . » 2 50

Archeologia dell'arte di I. Gentile:
- I. Arte Greca, pag. XII-126 . . . . » 1 50
- II. Arte Romana, pag. IV-224. . . . . » 1 50

Architettura italiana, di Alfredo Melani, di pag. XVIII-213 e XII-266, con 46 tav. e 113 fig., 2 vol., 2.ª edizione . » 6 —
- I. Architettura Pelasgica, Etrusca, Italo-Greca e Romana.
- II. Architettura Medievale, del Rinascimento, del Cinquecento, Barocca, del Settecento, e Contemporanea.

Arte mineraria, di V. Zoppetti, di pag. IV-182, con 112 fig. in 14 tavole . . . . » 2 —

Assicurazione sulla Vita, di C. Pagani, pag. VI-151 . . » 1 50

Astronomia, di Lockyer, trad. di Schiaparelli, 3.ª edizione, pag. VI-155, con 45 incisioni . . . . » 1 50

Atlante geografico universale, 25 tavole, di R. Kiepert, con notizie geografiche e statistiche del dott. Garollo, 6.ª ediz. completamente rifatta, con 61 pag. di testo . . . . » 2 —

Bachi da seta, di T. Nenci, pag. 276, con 41 inc. e 2 tav. L. 2 —
Bibliografia, di G. Ottino, pag. VI-158, con 11 incisioni » 2 —
Botanica, di Hooker, trad. Pedicino, 3.ª edizione, pagine XII-138, con 68 incisioni . . . . » 1 50
Caseificio, di L. Manetti, pag. 208, con 18 incisioni . . » 2 —
Chimica, di Roscoe, trad. Pavesi, pag. VIII-134, con 36 inc., 3.ª edizione . . . . » 1 50
Colori e vernici, di G. Gorini, 2.ª edizione, pag. IV-184 » 2 —
Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. Crotti, pag. IV-260. . . . . » 2 —
Computisteria, di V. Gitti, vol. I, Computisteria Commerciale, pag. VI-172 . . . . » 1 50
Concia delle pelli, di G. Gorini, pag. 150 . . . . . . » 2 —
Conserve alimentari, di G. Gorini, pag. 161 . . . . . » 2 —
Cubatura. — Prontuario per la cubatura dei legnami rotondi e squadrati secondo il sistema metrico decimale, di G. Belluomini, di pag. 169 . . . . » 2 50
Curve. — Manuale pel tracciamento delle curve delle Ferrovie e Strade carrettiere, calcolato nel modo più accurato per tutti gli angoli e i raggi, di E. Krönke, tradotto da L. Loria, 2.ª edizione, pag. 164 e 1 tav. . . . . » 2 50
Dante, di G. A. Scartazzini, 2 vol. di pag. VIII-159 e IV-147:
I. Vita di Dante . . . . » 1 50
II. Opere di Dante . . . . » 1 50
Dinamica elementare, di G. Cattaneo, p. VIII-145, con 25 fig. » 1 50
Diritti e doveri del cittadino, di D. Maffioli, colla spiegazione dello Statuto secondo le Istruzioni ed i Programmi governativi per le Scuole Tecniche, Magistrali e Popolari del Regno. 5.ª ed., di pag. X-172 . . . . » 1 50
Diritto costituzionale, di F. P. Contuzzi, pag. . . . » 1 50
Diritto internazionale pubblico, di F. P. Contuzzi, pag. » 1 50
Diritto penale, di A. Stoppato, pag. VIII-192 . . . . » 1 50
Diritto Romano, di C. Ferrini, pag. IV-129 . . . . . » 1 50
Disegno. — I principii del Disegno e gli stili dell'Ornamento, di Camillo Boito, 3.ª ediz., di pagine IV-206, con 61 silog. » 2 —
Disegno topografico, di L. Bertelli, pag. VI-185, con 12 tav. e 10 incisioni . . . . » 2 —

Scoltura. — Scoltura italiana antica e moderna, di Alfredo Melani, di pag. XXVIII-196, con 56 tavole e 26 figure intercalate . . . . L. 4 —

Seta (Industria della). Riassunto dei dati scientifici e tecnici relativi alla produzione della seta, di L. Gabba, 2.ª edizione, pag. X-207 . . . . » 2 —

Sismologia, di L. Gatta, di pag. VIII-175, con 16 inc. e 1 carta . . . . » 1 50

Spettroscopio e sue applicazioni, di R. Proctor, trad. Porro, pag. VI-178 con 71 inc. e 1 tavola colorata . . . . » 1 50

Storia e Cronologia Medioevale e Moderna in CC tavole sinottiche, di V. Casagrandi, di pag. XVIII-203 . . . » 1 50

Storia italiana, di C. Cantù, pag. 160 . . . . » 1 50

Tabacco, di G. Cantoni, pag. IV-175, con 6 incisioni . » 2 —

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. Sacchetti, pagine XIV-192. . . . . » 2 —

Telefono, di D. V. Piccoli, pag. 119, con 38 incisioni. . » 2 —

Termodinamica, di C. Cattaneo, pag. X-195, con 4 fig. . » 1 50

Tintore, di R. Lepetit, 3.ª edizione illustrata . . . . » 2 —

Viticoltura razionale. Precetti ad uso del Viticoltore italiano, di O. Ottavi, 2.ª edizione, pag. VIII-168 e 22 incisioni » 2 —

Vulcanismo, di L. Gatta, pag. VIII-267, con 28 incisioni » 1 50

Zoologia, di Giglioli-Cavanna, 3 volumi:

- I. Invertebrati, pag. VIII-200 con 45 figure . . . » 1 50
- II. Vertebrati. Parte 1.ª, Ittiopsidi; di pag. XVI-155 e 35 incisioni . . . . » 1 50
- III. Vertebrati. Parte 2.ª, Sauropsidi, Teriopsidi; pagine XVI-200, con 22 incisioni . . . . . . » 1 50

Non abbiamo compresi nell' elenco i volumi che sono attualmente in lavoro, ai quali poi seguiranno altri da abbracciare un vasto campo; sopratutto ci proponiamo di non ammettere in questa collezione se non opere veramente scelte, per mantenere la fama ed il credito che il pubblico si compiacque accordare ai Manuali Hoepli.